平成１０年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ａ

平成９年９月１０日（水）

９時００分～１２時００分

「注意事項」

1. 問題は７題であり、これらの中から 任意に４題選んで 解答すること。
（５題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A1}}$ $\mathbb{R}$ を実数全体，n をある自然数，V を n 次元 $\mathbb{R}$ 上ベクトル空間とする．また，f を V 上 $\mathbb{R}$- 双線形写像とする．つまり，

$$f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \cdot f(u, w) + \beta \cdot f(v, w)$$

$$f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \cdot f(u, v) + \beta \cdot f(u, w)$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v, w \in V$$

を満たしている．また，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の一つの $\mathbb{R}$- 基底とする．このとき，次の問い (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $v \in V$ を一つ固定する．このとき

$$f(w, v) = 0,\ \forall w \in V \quad \Longleftrightarrow \quad f(v_i, v) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, n$$

を証明せよ．

(2) 各 i, j に対して，$\alpha_{ij} = f(v_i, v_j)$, $i = 1, \cdots, n$; $j = 1, \cdots, n$ とおく．そして，α_{ij} が (i, j) 成分である n 次実正方行列を A とする．このとき，次の条件 (a), (b) が同値であることを証明せよ．

(a) $v \in V$ が $f(v_i, v) = 0, \forall i = 1, \cdots, n$ をみたす $\Rightarrow$ $v = 0$

(b) $\det A \neq 0$

(3) 次の条件 (c), (d) が同値であることを証明せよ．

(c) $v \in V$ が $f(w, v) = 0, \forall w \in V$ をみたす $\Rightarrow$ $v = 0$

(d) $v \in V$ が $f(v, w) = 0, \forall w \in V$ をみたす $\Rightarrow$ $v = 0$

$\boxed{\textbf{A2}}$ 漸化式 $x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$ を満たす複素数列 $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考え、そのような数列の全体を V とする。通常の数列の定数倍、和を演算として V は複素ベクトル空間となる。以下の問いに答えよ。

(1) V の 2 つの元

$$e_1 = \{0, 1, 1, 2, 3, 5 \cdots\}$$
$$e_2 = \{1, 0, 1, 1, 2, 3 \cdots\}$$

を定めると e_1, e_2 は V の基底になることを示せ。

(2) 写像 $f : V \longrightarrow V$ を

$$f : \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\} \longmapsto \{x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{n+1}, \cdots\}$$

によって定めると線形写像となる（証明不要）。基底 $\{e_1, e_2\}$ に関する f の表現行列（すなわち $(f(e_1), f(e_2)) = (e_1, e_2)A$ となる行列 A）を求めよ。

(3) f の固有値と、各々の固有値に対応する固有ベクトルとなる数列を求めよ（数列は一般項で示すこと）。

$\boxed{\textbf{A3}}$

(1) $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき， $f^{(n)}(0)$ の値を求めよ。

(2) $[a,\ b]$ で $f(x)$ を連続とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\{\int_a^b |f(x)|^n dx\}^{\frac{1}{n}} = \sup_{a\le x\le b}|f(x)|$$

であることを示せ。

$\boxed{\textbf{A4}}$

$s > 0$ に対し、

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

とおく。この時、次の問に答えよ。

(1). 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ が収束することを示せ。

(2). 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ が収束することを示せ。

(3). $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{\textbf{A5}}$

(X, d) を距離空間とする。

(1) X から X への写像 f が連続であることを $\varepsilon - \delta$ を用いて述べよ。

(2) 次の４つの命題について、正しいものには証明を、正しくないものには反例をあげよ。

(a) f が X から X への連続写像ならば、
X の任意の開集合 U に対して $f(U)$ も開集合である。

(b) X から X への写像 f が任意の集合 A に対して $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を満たすならば、
f は連続である。

(c) f が X から X への連続写像ならば、 X の任意のコンパクト集合 K に対して
$f(K)$ もコンパクトになる。

(d) f が X から X への連続写像ならば、 X の任意のコンパクト集合 K に対して
$f^{-1}(K)$ もコンパクトになる。

A6 確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$ とし，その密度関数 $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ をもつとする。実数 a に対して，絶対偏差の期待値

$$\phi(a) = E[\,|X - a|\,]$$

とおく。

(1) この $\phi(a)$ を最小にする値が存在することを示せ。

(2) (1) の値を a^* とするとき， $F(a^*)$ の値を求めよ。

A7 関数 power を次のような Pascal プログラム (の断片) によって定める。

```
function power(x, y: integer): integer;
   var w: integer;
   begin
      if y = 0 then power := 1
      else
         begin
            w := power(x, y div 2);
            if y mod 2 = 0 then power := w*w
            else power := w*w*x;
         end;
   end;
```

y の値が $m\,(\geq 0)$ のとき power(x, y) の計算中に使われるかけ算の回数を c_m とする。

(1) c_m と c_{2m} の関係および c_m と c_{2m+1} の関係を求めよ。

(2) $2^{c_m} \leq (m+1)^2$ が成り立つことを示せ。