平成１１年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

# 数学Ａ

平成１０年９月９日（水）

９時００分～１２時００分

「注意事項」

1. 問題は７題であり、これらの中から 任意に４題選んで 解答すること。
（５題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A1}}$ $V$ は 3 次元実ベクトル空間, $a \in V$ はゼロでないあるベクトル, $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ は双線形写像 (各変数について線形な写像) で以下の (i), (ii), (iii) を満たすものとする.

(i) 任意の $x, y \in V$ に対し $f(x,y) = f(y,x)$ が成り立つ.

(ii) $f(a,a) < 0$.

(iii) $x \in V$ が $f(a,x) = 0$, $x \neq 0$ を満たせば $f(x,x) > 0$ である.

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(a,x) = 0$, $x \neq 0$ を満たす $x \in V$ が少なくともひとつ存在することを証明せよ.

(2) $V$ のある基底 $e_1$, $e_2$, $e_3$ をうまく選べば, 任意の $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in V$ $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R})$ に対し,

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

と書けることを証明せよ.

(3) 次の命題は正しいか?

$b \in V$ が, 次の 2 条件 (ii'), (iii') を満たせば, ある実数 $\lambda$ が存在して $b = \lambda a$ と書ける.

(ii') $f(b,b) < 0$.

(iii') $x \in V$ が $f(b,x) = 0$, $x \neq 0$ を満たせば $f(x,x) > 0$ である.

$\boxed{\textbf{A2}}$ 多項式 $p$ に対して,

$$(Tp)(x) = (x+1)p(x+1) - xp(x)$$

と定める.

(1) $n$ 次以下の複素数係数多項式全体の集合を $V_n$ とすると, $V_n$ は通常の和とスカラー倍とでベクトル空間となる. 上で定めた対応 $p \mapsto Tp$ は $V_n$ の線形変換となることを示せ.

(2) $n = 4$ の場合を考える. $V_4$ の適当な基底を選んで, 線形変換

$$T : V_4 \to V_4$$

を対角行列で表現せよ.

$\boxed{\textbf{A3}}$ 次の各問に答えよ.

(1) 開区間 $I = (0, 1)$ で定義された次の関数列 $\{f_n(x)\}$ は, $I$ で収束するが一様収束しないことを証明せよ:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1 - \frac{1}{n}) \\ 2n(x-1) + 2 & (1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 - \frac{1}{2n}) \\ -2n(x-1) & (1 - \frac{1}{2n} \leq x < 1). \end{cases}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とするとき, 次の積分の値を計算せよ:

$$\int\int_D (1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy.$$

$\boxed{\textbf{A4}}$ 次の整級数の収束半径を求めよ．また収束半径によって決まる収束区間の内部において, どのような関数に収束するか:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-2)^n}{n} x^n.$$

$\boxed{\textbf{A5}}$ 位相空間 $X$ の部分集合 $F$ がコンパクトであるとは,

$$F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

となる任意の開集合族 $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ の中から有限個の開集合 $\{U_{\alpha(1)}, \ldots, U_{\alpha(n)}\}$ が選べて

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha(i)}$$

とできることである.

$\mathbb{R}$ にユークリッド空間としての位相を考えるものとする．$F$ を $\mathbb{R}$ の中のコンパクトな部分集合とするとき, 上のコンパクトの定義を用いて以下を示せ.

(1) $F$ は有界であることを示せ.

(2) $F$ は閉集合であることを示せ.

(3) $F$ の補集合は, たかだか可算個の交わらない開区間の和集合になることを示せ.

$\boxed{\textbf{A6}}$ $n$ 回のコイン投げの結果に基づいて、このコインの表の出る確率 $p$ に関する仮説検定を行う。帰無仮説を $H_0 : p = \frac{1}{2}$, 対立仮説を $H_1 : p < \frac{1}{2}$ とし、$n$ 回のコイン投げにおいて表の出た回数 $T$ を検定統計量とする。 $T \leq c$ のとき $H_0$ を棄却し、$T > c$ のとき $H_0$ を採択するという検定方式を採用するとき、以下の問いに答えよ。

(1) $n = 6, c = 0$ とするとき、第 1 種の誤りの確率 $\alpha = P[T \leq c|H_0]$ を求めよ。

(2) $n = 6$ とするとき、検定の有意水準 $\alpha$ が 10% に最も近くなるように、定数 $c$ の値を定めよ。

(3) (2) の場合、 $p = \frac{1}{3}$ のときの検出力 $1 - \beta$ はいくらか。ここで $\beta$ は第 2 種の誤りの確率を表す。

(4) 2 項分布の正規近似を用いて、上記の仮説検定を行う。検定の有意水準を 10% とするとき、 $p = \frac{1}{3}$ のときの検出力が 90% 以上になるようにするには、 $n$ をいくら以上にすればよいか。ただし、 $Z$ を標準正規分布にしたがう確率変数とするとき、 $P[Z > 1.28] = 0.10$ である。

$\boxed{\textbf{A7}}$ 整数型のデータの有限集合を適当な構造型で実現するものとし、このデータの型を intset と呼ぶことにする。この型には十分多いデータを要素に持つことができ、かつその個数は可変であるようにする。使用するプログラム言語を Pascal, C, Fortran から選択し、次の問に答えよ。

(1) intset の型を定義をせよ。但し、 Pascal の集合型を使用してはならない。

(2) この型のデータをふたつ受け取り、それが等しいかどうかを返す関数 setequal を書け。但し、 intset 型のデータが等しいとは、それが表わす集合が等しいことである。

(3) 上のプログラムの説明を記せ。