平成１４年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ａ

平成１３年８月２２日（水）

９時００分～１２時００分

「注意事項」

1. 問題は８題であり、これらの中から任意に４題選んで解答すること。
（５題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに科目名，専攻名と受験番号を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする問題番号を明記し、
１枚に１題だけを解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A1 以下、ベクトル空間、線形写像は、すべて実数体 $\mathbb{R}$ 上で考える。
不定元 X についての実係数多項式で、次数が高々3であるもの全体を V とする。つまり、

$$V \; = \; \{p(X) \mid p(X) \in \mathbb{R}[X],\ \deg p(X) \leqq 3\}$$

である。

(1) V は、多項式の和と実数倍でベクトル空間になっている（これは証明しなくてよい)。このとき、V の基底を 1 組求めよ。

(2) V の部分集合 W を

$$W \; = \; \{p(X) \in V \mid p(0) = p(1) = 0\}$$

と定義する。このとき、W は V の部分空間になっていることを証明せよ。また、W の基底を 1 組求めよ。

(3) W を (2) と同じものとする。$p(X) \in W$ に対し、$X(p'(X) - p'(1))$ を対応させる写像は、W から W への線形写像であることを示し、(2) で求めた基底に関する表現行列を求めよ。（ただし $p'(X)$ は多項式 $p(X)$ の微分を表す。）

A2 次の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。A の固有値と ${}^tLAL$ が対角行列となる直交行列 L を求めよ。ただし ${}^tL$ は L の転置行列を表す。

(2) (1) の結果を用いて連立方程式

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

の実数解 (x, y, z) をすべて求めよ。

A3

(1) 三角関数 $\sin t$ は既知として、逆三角関数 $\sin^{-1} x$ の定義を述べよ。

(2) $f(x) = \sin^{-1} x$ に対して、

$$A(x)f^{(n+2)}(x) + B(x)f^{(n+1)}(x) + C(x)f^{(n)}(x) = 0$$

の形の関係式を導け。ただし、$A(x), B(x), C(x)$ は x の多項式である。

(3) 上の $f(x)$ に対して $x = 0$ でのベキ級数展開を求めよ。ただし、その級数が収束する x の範囲を決定し、極限が $f(x)$ に一致することの証明も与えよ。

A4

$\mathbb{N}$ を自然数の集合とするとき、実数値関数 $f(m,n)$ $(m,\ n \in \mathbb{N})$ について、次の問いに答えよ。

(1) 以下の性質を持つ $f(m,n)$ の例を一つあげよ。

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f(m,n)) \neq \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} f(m,n)).$$

(2) 関数 $f(m,n)$ が次の 2 条件

(A) 各 n に対して $\lim\limits_{m\to\infty} f(m,n)$ が存在する。

(B) 各 m に対して $\lim\limits_{n\to\infty} f(m,n)$ が存在し、それを α_m とするとき、$\lim\limits_{n\to\infty} f(m,n) = \alpha_m$ が m に関して一様収束する。（すなわち、任意の正数 ε に対して、ε だけによって決まる自然数 N があって、$n \geq N$ となるすべての n とすべての自然数 m に対して $|f(m,n) - \alpha_m| < \varepsilon$ となる。）

を満たすとき

(i) $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m$ が存在することを示せ。

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} f(m,n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} f(m,n))$ を示せ。

$\boxed{\textbf{A5}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 空でない位相空間 X から X への連続写像が 1 つしかないならば X は 1 点からなる集合であることを証明せよ。

(2) 有限集合 X から X へのすべての全単射が連続であるような X の位相は, 密着位相か離散位相しかないことを示せ。

(3) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に対して, 1 点からなる部分集合がすべて閉部分集合となるような位相のうちもっとも弱い位相を $\mathcal{O}$ とする。この位相が密着位相でも離散位相でもないこと, 及びこの位相を入れて $\mathbb{Z}$ を位相空間と考えるとき, $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ へのすべての全単射が連続であることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{A6}}$ 1 , 2 , 3 の番号の付いた 3 個の球が入っている箱から元へ戻すことなく一つずつ抽出したサイズ 2 の標本を考える。最初に抽出した球の番号を X、抽出した二つの球の番号のうち大きい方を Y とする。

(1) X と Y の結合離散密度関数を求めよ。

(2) 条件付き確率 $P[\ X = 1 \mid Y = 3\ ]$ を求めよ。

(3) X と Y の共分散 $cov[X, Y]$ を求めよ。

A7 以下の 2 つのプログラムに $n+1$ 個の自然数 $n\ p_1\ \cdots\ p_n$ を入力として与える。(ただし $1 \le n \le 100$、$1 \le p_i \le n$ で、$p_1, \ldots, p_n$ は互いに異なるものとする。)

プログラム 1

```
program inv(input, output);
const nmax = 100;
var p, q: array[1..nmax] of integer;  n, i: integer;
begin
  read(n);  for i := 1 to n do read(p[i]);
  for i := 1 to n do q[p[i]] := i;
  for i := 1 to n do write(q[i]);  writeln
end.
```

プログラム 2

```
program inv(input, output);
const nmax = 100;
var p: array[1..nmax] of integer;  n, i, cur, prev, next: integer;
begin
  read(n);  for i := 1 to n do read(p[i]);
  for i := 1 to n do
    if p[i] > 0 then
      begin
        next := p[i];  prev := i;
        repeat
          cur := next;  next := p[cur];  [    A    ];  prev := cur
        until cur = i
      end;
  for i := 1 to n do write(−p[i]);  writeln
end.
```

(1) 6 2 3 4 1 6 5 をプログラム 1 に入力したとき、どのような出力があるか記せ。

(2) プログラム 1 とプログラム 2 に同じ入力を与えたとき、プログラム 1 とプログラム 2 の出力が同じになるように $\boxed{\quad A \quad}$ の部分を埋め、同じになる理由を述べよ。(2 番目の for 文の本体に p[i] > 0 という条件が付いている理由も述べること。)

A8 次は Pascal のプログラムの断片 (ただし n は正の自然数) である。sort は n 個の要素を持つ配列 a をクイックソートにより整列する手続きで、sort(1, n) という引数で呼び出す。

```
const n = n;
var a: array[1..n] of interger;
procedure sort(left, right: integer);
  var i, j: integer;  pivot, tmp: integer;
begin
  if left < right then
    begin
      pivot := a[(left + right) div 2];
      i := left; j := right;
      repeat
        while a[i] < pivot do i := i + 1;
        while a[j] > pivot do j := j - 1;
        if i <= j then begin tmp := a[i]; a[i] := a[j]; a[j] := tmp;
                             i := i + 1; j := j - 1 end;
      until i > j;
      sort(left, j);
      sort(i,right);
    end;
end;
```

(1) 最初に述べたように手続き sort を実行したとき、配列 a 以外に必要とする記憶領域の大きさは最悪の場合 $O(\log n)$, $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$ のどれになるか。理由とともに答えよ。

(2) プログラムを改良し、配列 a 以外に必要とする記憶領域の大きさのオーダーが最悪の場合でも上のプログラムより小さいものを作り、その記憶領域の大きさは最悪の場合にどの程度になるか述べよ。