平成１６年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学A

平成１５年８月２０日（水）

９時００分～１２時００分

「注意事項」

1. 問題は８題であり、これらの中から <u>任意に４題選んで</u> 解答すること。
   （５題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は４枚あるので、そのすべてに <u>科目名，専攻名と受験番号</u> を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする <u>問題番号を明記</u> し、
   <u>１枚に１題だけ</u> を解答すること。
   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A1　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について考える。

(1) $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im} f$ ならば、$f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$ であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$ を示せ。

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関する f の表現行列 F を求めよ。

ここで，$\mathrm{Im} f$，$\mathrm{Ker} f$ はそれぞれ f の像空間、核空間である。

A2　次の各問いに答えよ。

(1) A を n 次正方行列、P を n 次正則行列とする。λ を A の 1 つの固有値とするとき、次の (i), (ii) は同値であることを示せ。

(i) P の第 j 列 $\boldsymbol{p}_j (= P\boldsymbol{e}_j)$ は λ に対する A の固有ベクトルである。

(ii) $P^{-1}AP$ の第 j 列 は $\lambda \boldsymbol{e}_j$ である。

ここで、$\boldsymbol{e}_j$ は n 次単位行列の第 j 列を表す列ベクトルである。

(2) 実行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 2 & b \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ において、a, b はともに 0 でない実数とする。

(i) A の固有値を求めよ。

(ii) A が対角化可能となるための実数 a, b の条件を求めよ。

A3

(1) n 次多項式 $P(t)$ に対して

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{P(t)}{e^t}$$

を求めよ。

以下、 $(-\infty,\infty)$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

を考察する。

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で微分可能であることを証明せよ。

(3) $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ での C^∞ 級関数であることを証明せよ。

(4) $f(x)$ を利用して $(-\infty,\infty)$ での C^∞ 級関数 $g(x)$ で

(a) $g(x)\equiv 0 \qquad (x\le 0)$,
(b) $g(x)\equiv 1 \qquad (x\ge 1)$,
(c) $0\le g(x)\le 1, \qquad \forall x\in(-\infty,\infty)$

を同時に満たすものを構成せよ。

A4

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ のマクローリン展開 (原点におけるテイラー展開) とその収束半径を求めよ。

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1<x<1)$ を計算せよ。

(3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le\frac{3}{4}, x\ge 0, y\ge 0\}$ とするとき、重積分

$$\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}\sqrt{x^2+y^2}}$$

を計算せよ。

$\boxed{\textbf{A5}}$ ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の円板全体の作る集合を $\mathcal{D}$ とおく。すなわち $\mathcal{D}$ の各元は中心 (a,b), 半径 $r>0$ を用いて

$$\delta=\delta(a,b,r)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}$$

で表される xy-平面の部分集合である。

関数 $d:\mathcal{D}\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ を $\delta_1,\delta_2\in\mathcal{D}$ に対して

$$d(\delta_1,\delta_2)=\mu(\delta_1\cup\delta_2)-\mu(\delta_1\cap\delta_2)$$

で定義する。ただし $\mu(A)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A の面積を表すものとする。

(1) $(\mathcal{D},d)$ は距離空間になることを示しなさい。

(2) $(\mathcal{D},d)$ は位相空間として $\mathbb{R}^3$ に同相であることを示しなさい。

$\boxed{\textbf{A6}}$ 一つのサイコロを 50 回投げたところ、１の目が 14 回出た。このサイコロについて、１の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ かどうかを調べるために仮説検定を行う。

(1) １回投げて１の目が出る確率を p とおく。帰無仮説を述べよ。

(2) 検定統計量を T、棄却域を R とする。いま両側に対立仮説があるとして、第１種の過誤の確率、第２種の過誤を T,R を用いて表せ。

(3) パラメータ n,p の二項分布 $B(n,p)$ の平均と標準偏差を求めよ。

(4) ２項分布は中心極限定理を用いて正規分布で近似できる。この正規近似を用いて、有意水準 10% の両側検定をせよ。ただし、Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、$P[Z>1.28]=0.10, P[Z>1.645]=0.05, P[Z>1.96]=0.025, P[Z>2.15]=0.02$ として計算せよ。

A7 下に Pascal による定数と型の定義と、関数 find の宣言を示す。関数 find の中では、型 table の変数は、フィールド n の値が n であるとき、フィールド a の a[1], $\cdots$, a[n] に値がセットしてあるとして使うようにする。

(1) この関数宣言の中で a[n+1] の配列要素を用いている。この要素を用いないで、関数値が同じとなるように、宣言を書き改めよ。局所変数などの宣言は必要に応じて記せ。

(2) 書き改める前のプログラムと書き改めた後のものとの得失を記せ。

```
const
   size = 100;
type
   item = integer;
   table = record
                n : 0 .. size;
                a : array [1 .. size] of item
           end;
function find(x: item; var t : table) : integer;
var i : integer;
begin
  with t do
  begin
    i := 0;  a[n+1] := x;
    repeat i:= i + 1 until a[i] = x;
    if i <= n then find := i else find := 0
  end
end;
```

A8 下の Pascal のプログラムについて次の問いに答えよ。

(1) input から読まれるデータが 5 3 5 1 2 4 であるときの出力を記せ。

(2) n を非負の整数とするとき、input から読まれるデータが $a_0, \cdots, a_n$ の $n+1$ 個の整数の並びであるとき、出力はどうであるか。

```
program binarytree(input, output);
type
  tree = ^node;
  node = record key : integer; left, right : tree end;
var
  root : tree;

procedure entry(x : integer; var t : tree);
begin
  if t = nil then begin
    new(t);
    with t^ do begin key := x; left := nil; right := nil end end
  else if x < t^.key then entry(x, t^.left)
  else if x > t^.key then entry(x, t^.right)
end;

procedure make(var t: tree);
var n, i, k : integer;
begin t := nil;
  read(n);
  for i := 1 to n do begin read(k); entry(k, t) end
end;

procedure print(t : tree);
begin
  if t <> nil then
  begin
     print(t^.left); write(t^.key); print(t^.right)
  end
end;

begin
  make(root);
  print(root); writeln
end.
```