平成１０年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成９年９月１０日（水）

１４時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１３題であり、これらの中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

B1 以下，p は素数とし，$D(G)$, $Z(G)$ は，それぞれ群 G の交換子群，中心である。

(1) H を群 G の部分群とするとき，次は同値であることを示せ。

(i) H が G の正規部分群で，かつ G/H がアーベル群である

(ii) $H \supseteq D(G)$

(2) G を位数 p^3 の非可換な p- 群とするとき，$Z(G) = D(G)$ かつ $|Z(G)| = p$ であることを示せ。

(3) 有限体 $GF(p)$ 上の一般線形群 $GL(3,p)$ の部分群

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in GF(p) \right\}$$

の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(P)$ は (p,p) 型のアーベル群であることを示せ。

B2 以下，K を体とする．K 上代数（多元環）A（つまり，A は K 上ベクトル空間かつ環であって，$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \forall\alpha \in K,\ \forall a,b \in A$ をみたす）と K- 線形写像 $f : A \to K$ に対して，次の性質 $(*)$ を考える．

$(*)$ A の右イデアル I が 任意の $a \in I$に対して$f(a) = 0$ をみたす $\Rightarrow$ $I = \{0\}$

このとき，次の (1), (2) の各 A と f に対して，$(*)$ が成立することを証明せよ．

(1) 自然数 n に対して，A を K 上 n 次正方行列全体とする．このとき A は自然に行列の和と積について K 上代数となる（これは証明しなくてよい）．さて，$f : A \to K$ を

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\ , \quad \forall a = (\alpha_{ij})_{i,j} \in A,\ \ \alpha_{ij} \in K$$

と定義する．つまり，f は行列の固有和 (trace) を取る操作である．

(2) 自然数 n と，K 上 1 変数多項式代数 $K[X]$ に対して，J を単項式 X^n で生成される $K[X]$ のイデアルとする．そして，A を $K[X]$ の剰余代数

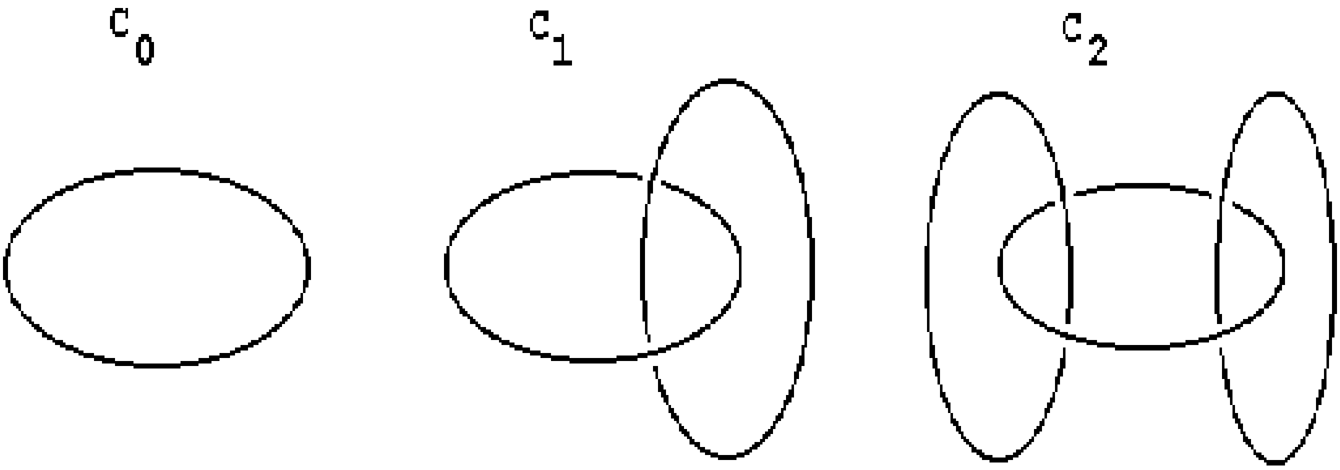
$$A \ = \ K[X]/J \ = \ K[X]/(X^n)$$

と定義する．また，$x \ = \ X + J \in K[X]/J = A$ とおく．このとき，$\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ は A の一つの K- 基底となる（これは証明しなくてよい）．さて，$f :\ A \to K$ を

$$f\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i\right) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i\ , \qquad \alpha_i \in K$$

で定義する．

B3 S^3 における次の図形 C_0, C_1, C_2 を考える。



$X_t = S^3 \setminus C_t$ $(t = 0, 1, 2)$ とおくとき、

1. $H_\cdot(X_0, \mathbf{Q})$ を求めよ。
2. $H_\cdot(X_1, \mathbf{Q})$ を求めよ。
3. $H_\cdot(X_2, \mathbf{Q})$ を求めよ。

ただし $\mathbf{Q}$ は有理数の集合を表す。

B4 n 次元多様体 M 上の 1 次微分形式 η について、 M 上の C^∞ 関数 f で

$$\eta = df$$

となるものが存在するかどうかを考える。

1. $S^1 = \{e^{i\theta} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 上の 1 次微分形式 $\eta = d\theta$ については、上のような f が存在しないことを示せ。
2. S^n $(n \geq 2)$ 上の 1 次微分形式 η について上のような f が存在するための必要十分条件は
$$d\eta = 0$$
であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B5}}$

(1)　複素関数論における留数定理を述べ, 以下の積分値を求めよ。

$$\text{(a)} \qquad \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z^2+1} dz$$

$$\text{(b)} \qquad \int_{|z-i|=1} \frac{1}{z^2+1} dz$$

$$\text{(c)} \qquad \int_{|z-i|=1} \frac{z}{(z^2+1)^2} dz$$

(2)　次の積分値を求めよ。

$$\int_{|z-i|=1} \frac{z^n}{(z^2+1)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし、以下の事柄を用いてもよろしい。

$(*)$　$z = a$ に $n+1$ 位の極を持つ関数 $f(z)$ の $z = a$ での留数は

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}((z-a)^{n+1}f(z))\right)|_{z=a}$$

で与えられる。

$(**)$ ルジャンドル多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

に対して

$$P_n(1-2x) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell}\binom{n+\ell}{\ell} x^\ell$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n = \text{奇数のとき} \\ (-1)^{n/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} & n = \text{偶数のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

$\boxed{\textbf{B6}}$ $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上でルベーク可積分とするとき、

$$\lim_{y\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f(x+y)-f(x)|dx = 2\int_{\mathbf{R}}|f(x)|dx$$

であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ 次の偏微分方程式の Cauchy 問題を考察する：

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \quad (0<t, -\infty<x<\infty) \tag{0.1}$$

$$u(0,x)=e^{-x^2}, \frac{\partial u}{\partial x}(0,x)=c \quad (-\infty<x<\infty) \tag{0.2}$$

但し、ここで $c>0$ とする。

(i). 方程式 (1) は、変数変換 $\xi = x-ct, \eta = x+ct$ によって $u_{\xi\eta}=0$ と変換されることを示せ。

(ii). (i) を用いて 上の Cauchy 問題を解け (solve)。

$\boxed{\textbf{B8}}$ X を Banach 空間とし, X 上の有界線形作用素全体の集まりを $B(X)$ とすると $B(X)$ も Banach 空間となる。さらに, $B(X)$ に

$$f\circ g(x) = f(g(x)) \quad (f,\ g\in B(X),\ x\in X)$$

で演算 $\circ$ を入れ, e を X 上の恒等作用素とすると $B(X)$ は Banach 環となる。

(1) Banach 環となる条件を述べよ。

(2) $f\in B(X)$ が $||e-f||<1$ を満たすならば, f は逆元をもつことを示し，それを e と f を用いて表せ。

$\boxed{\textbf{B9}}$ 確率変数列 $X_n, n=1,2,\cdots$ において，各変数はそれぞれ平均 μ, 分散 σ_n^2 をもち, $\sigma_n^2\to 0\,(n\to\infty)$ とする。

(1) 有界で連続な関数 $f(x), -\infty<x<\infty$ について, $E[f(X_n)]\to f(\mu),\ n\to\infty$ が成り立つことを示せ。

(2) 上の命題をもちいて，つぎを示せ。 $0<p<1$ に対し,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k}\to p^2,\ n\to\infty$$

ここで $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ は 2 項係数とする 。

$\boxed{\textbf{B10}}$ $T_k, k = 1, 2, \cdots, n$ がすべてパラメータ 1 の指数分布に従う独立確率変数であるとする。すなわち、 $F(x) = 1 - e^{-x}$。

(1) T_k の平均、分散、積率母関数を求めよ。

(2) $S_n := \sum_{k=1}^{n} T_k$ の分布を求めよ。

(3) $N := \max\{n \mid S_n \leq 1\}$ の分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B11}}$ $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ は、次の確率密度関数 $f(x)$ をもつ正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からとられた無作為標本とする。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

また、次の直交行列 H によって $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ を変数変換した確率変数を $(Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n)$ とする。

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

(1) 確率変数 Y_1 の分布を求めよ。

(2) 確率変数 Y_n の分布を求めよ。

(3) $(Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n)$ は、互いに独立に正規分布にしたがうことを示せ。

(4) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ と $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は、互いに独立に分布することを示せ。

(5) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$ の分布を求めよ。

B12 変数 table と n が次のように宣言されているものとする。

```
n : index;
table : array [1..size] of record key: keytype;
                                  otherinfo: othertype;
                           end
```

ここで size は表の大きさを表す適当な値の定数であり、型 index と keytype は

$$\text{index} = 0 \,..\, \text{size};\ \text{keytype} = \text{integer}$$

のように定義されており、 othertype はデータの型名である。
変数 table は、データが添字 1 から順に入っている表であり、データの個数は変数 n で与えられ、 table の各要素は key の値が昇順になるように並べられているものとする。
下に示す手続き search は、表 table の中に target に与えられた値と等しいキーを持つデータがあるかどうかを捜すものである。探索の結果を、変数 found にデータがあったか否かを返し、更にあった場合には変数 pos にみつけた要素の添字を返す。
次の問いに答よ。

1. 枠の中に適当な文を入れてプログラムを完成せよ。
2. プログラム中の繰返しが停止することを示せ。
3. このプログラムが探索の仕様を満たすことを示すに十分な繰返しの不変条件 (ループ不変式、 loop invariant) を記せ。
4. このプログラムが正しいことを示せ。但し、形式的に記す必要はない。

```
procedure search(target : keytype;
                 var found : Boolean; var pos : index);
    var hi, mid : index; lo : integer;
begin
    lo := 1; hi := n;
    while lo ≤ hi do
    begin
        mid := (lo+hi) div 2;
        if target < table[mid].key then hi := mid − 1 else lo := mid + 1
    end;
    ┌──────────────────────────────┐
    │   pos と found の値を設定する   │
    └──────────────────────────────┘
end;
```

B13 有理式の微分を数式処理で行うこととし、これを実現する Lisp のプログラムについて考える。

1. x の有理式 $f(x)$ をＳ式 (記号表現、 symbolic expression) で表現する。但し、加減乗除とベキ乗の演算子をそれぞれ、 $+, -, *, /, \hat{}$ で表す。

   式が $\dfrac{2x}{1+x^2}$ であるとき、これをＳ式の表現に改めよ。

2. 関数 diff-form を定義せよ。但し、 diff-form は (diff-form e v) のように引数をふたつとる。第二引数の v はアトムで変数を表し、第一引数の e は v の表す変数の有理式を表現するＳ式である。評価結果は、 e の表す式を v の表す変数で微分したものを表現するＳ式である。尚、 e に出現する v 以外のアトムは定数として微分してよい。また、結果を簡単化 (simplify) する必要はない。

3. 結果の式を簡単化する関数 simplify-form に必要と思われる仕様を記せ。

但し、 Pascal や C で解答することを認める。この場合にはＳ式に相当するデータ構造を定義し、それに従ってプログラムせよ。