平成１２年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１１年９月７日（火）

１４時００分〜１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１３題であり、これらの中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに受験番号と氏名を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{B1}}$　G を有限群とし，G のすべての極大部分群の共通部分を $\Phi(G)$ とおく。このとき，次を証明せよ。

(1) $\Phi(G)$ は，G の特性部分群である。

(2) $\Phi(G)$ の Sylow 部分群は，G の正規部分群である。

(3) G を p- 群，M を G の極大部分群とすれば，$M \supset D(G)$ である。
ここで，p は素数であり，$D(G)$ は G の交換子群，すなわち $[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$ $(a, b \in G)$ 全体で生成される部分群を表す。

$\boxed{\textbf{B2}}$　以下，R は可換環，$S = k[X, Y]$ は体 k 上の 2 変数多項式環とする。また，$(X^2 - Y^2, XY)S$ は $X^2 - Y^2$, XY の生成する S のイデアルを表す。

(1) M を R のイデアルとするとき，剰余環 R/M が体であることは，M が R の極大イデアルとなるための必要十分条件であることを示せ。

(2) $S/(X^2 - Y^2, XY)S$ の極大イデアルは唯一つであることを示せ。

(3) $S/(X^2 - Y^2, XY)S$ の k 上のベクトル空間としての次元を求めよ。

$\boxed{\textbf{B3}}$　n を 1 以上の整数, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$, とする.

$$X_{n,\lambda} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_0^{2n} + x_1^{2n} + x_2^{2n} = 1,\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0\}$$

は $\lambda \neq (0,0,0)$ のとき 1 次元コンパクト多様体であることを示せ.

$\boxed{\textbf{B4}}$　次の各問いに答えよ。

(1)　複素数全体の作る平面 $\mathbb{C}$ から 0 を除いた空間 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ の整係数ホモロジー群 $H_q(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z})$ を求めよ。

(2)　$f : S^1 \to \mathbb{C}^\times$ を、円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の $\mathbb{C}^\times$ への任意の埋め込みとする。すなわち f は S^1 から像 $f(S^1) \subset \mathbb{C}^\times$ の上への位相同型である。f が 1 次元ホモロジー群に誘導する準同型 $f_* : H_1(S^1; \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z})$ が全射でなければ、$f_*(H_1(S^1; \mathbb{Z})) = \{0\}$ となることを証明せよ。ここで、平面 $\mathbb{C}$ 内に埋め込まれた円周はつねに $\mathbb{C}$ 内に埋め込まれた円板の境界になること（Schoenflies の定理）を使ってよい。

(3)　$p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ を $p(z) = z^2$ で定義する。1 次元ホモロジー類 $\alpha \in H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z})$ であって、円周の埋め込み $g : S^1 \to \mathbb{C}^\times$ を用いて $\alpha = (p \circ g)_*([S^1])$ と表されるものをすべて求めよ。ここに $[S^1]$ は $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ の生成元を表す。

$\boxed{\textbf{B5}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 複素関数

$$f(z) = \frac{1 + \exp(\pi i z/2)}{1 + z^2}$$

の極と, そこでの留数を求めよ.

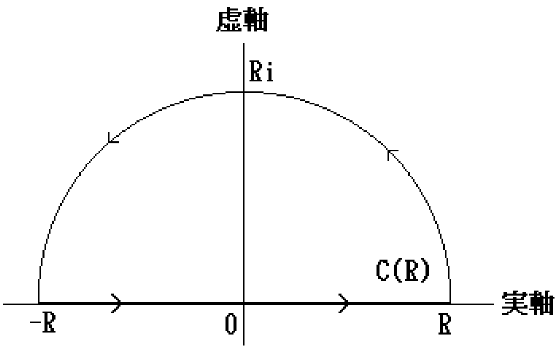
(2) 広義積分

$$I = \int_0^\infty \frac{1 + \cos(\pi x/2)}{x^2 + 1} dx$$

が, 複素積分

$$\int_{C(R)} f(z) dz \quad (R > 1)$$

からどのように導かれるか (手順を) 説明せよ. ただし, $C(R)$ は図の積分路をあらわす. この考察にしたがって, 証明をつけて I の値を求めよ.



$\boxed{\textbf{B6}}$ f_n, g_n, f, g は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ積分可能な実数値関数とし,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

を満たすものとする. このとき

$$|f_n(x)| \leq g_n(x), \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

となることを示せ.

B7 $a_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を区間 $I \subset \mathbb{R}$ で定義された連続関数として, 微分方程式

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \tag{E}$$

を考える. (E) の n 個の解 $x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)$ を取り, これに対し行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ & & \cdots & \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \cdots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

とおく. このとき

(1) $W(t)$ の微分を計算することにより, $W(t)$ に関する一階の微分方程式を導け.

(2) (1) を用いて I の任意の点 t, τ に対し, 次の式が成り立つことを示せ:

$$W(t) = W(\tau)\exp\left(-\int_\tau^t a_1(s)ds\right).$$

B8 $C[0,1]$ は閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の全体を表すものとし, $f, g \in C[0,1]$ を $f(t) = t^2$, $g(t) = at + b$ (a, b は実数) とおく.

(1) $C[0,1]$ 上のノルムとして

$$\|h\| = \sup\{|h(t)| \mid t \in [0,1]\}, \quad h \in C[0,1]$$

を考えるとき, $\|f - g\|$ が最小となる a, b の値とその最小値を求めよ.

(2) $C[0,1]$ 上のノルムとして

$$\|h\| = \sqrt{\int_0^1 |h(t)|^2 dt}, \quad h \in C[0,1]$$

を考えるとき, $\|f - g\|$ が最小となる a, b の値とその最小値を求めよ.

B9 $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を n 次元ボレル集合族とする。

(1) Ω を集合とし, ξ を Ω 上で定義
された実数値関数とする。このとき

$$\mathcal{C} = \{\xi^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

が σ- 加法族である事を示せ。

(2) $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, P を $[0,1) \times [0,1)$ 上のルベーク測度とする。$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 ξ を

$$\xi(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$$

で定義したとき, ξ の分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ $\theta > 0$ とし, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $(0, \theta)$ 上の一様分布に従う独立同分布確率変数とする。

(1) $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とおいたとき,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq y), \qquad y \in (-\infty, \infty)$$

を求めよ。

(2) Y_n は θ に確率収束すること示せ。

(3)

$$T_n = \frac{n(\theta - Y_n)}{\theta}$$

とおいたとき,

$$\lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t), \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

を求めよ。

$\boxed{\textbf{B11}}$ X_1, X_2 を母数 $\theta (\theta > 0)$ の指数分布

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x \geq 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

からのランダム標本とする。

$$\text{帰無仮説} H_0 : \theta = 1, \qquad \text{対立仮説} H_1 : \theta = \frac{1}{2}$$

の検定を考える。

(1) 「ネイマン・ピアソンの補題」から最強力検定の棄却域が、ある定数 k を用いて

$$C(k) = \{(x_1, x_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty) : x_1 + x_2 \geq k\}$$

の形で表されることを示し、検定の大きさが $5e^{-4}$ になるように k を定めよ。

(2) 上の問いで求めた検定の検定力（検出力）を求めよ。

B12 フィボナッチ数 f_n を $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ (n \geq 0)$ によって定義する。

(1) $f_{n+m} = f_n f_{m+1} + f_{n-1} f_m$ を証明せよ。

(2) $f_{2n+1},\ f_{2n},\ f_{2n-1}$ のそれぞれを f_n と f_{n-1} を使って表わせ。

(3) (2) の関係を用いて、フィボナッチ数を計算するプログラムを書け。プログラミング言語は、 Scheme (Lisp), Pascal, C のいずれかを用いること。

B13 次はエディンバラ Prolog で書き表わしたクイックソートのプログラムである。

```
sort([],[]).
sort([X1|X2],Y) :-
     partition(X1,X2,P1,P2),
     sort(P1,S1), sort(P2,S2),
     append(S1,[X1|S2],Y).

partition(X,[],[],[]).
partition(X,[Y|Z],[Y|P1],P2) :- X>=Y, partition(X,Z,P1,P2).
partition(X,[Y|Z],P1,[Y|P2]) :- X<Y,  partition(X,Z,P1,P2).

append([],Y,Y).
append([A|X],Y,[A|Z]) :- append(X,Y,Z).
```

次の問に答えよ。

(1) `?- sort([3,4,2,6,1,5],X).`
としたときの、動きを記せ。

(2) このプログラムを、差分リスト (あるいは、重リスト, d-list, difference list, double list) の考えを用いて、`append` を使わないで書き直せ。ただし、`partition` はそのまま用いよ。

差分リスト：リストの対 $\langle l_1, l_2 \rangle$ で、一つの仮想的リスト l を表わす。ここで、リスト l_2 が丁度リスト l_1 の末尾に一致しているものであって、この仮想的リスト l が表すものは、リスト l_1 の先頭部分で、リスト l_2 が始まる前までの部分である。たとえば、$l_1 = [a, b, c, d, e],\ l_2 = [d, e]$ であるとき、差分リスト $l = \langle l_1, l_2 \rangle$ が表わすリストは、$[a, b, c]$ であると考えるものである。

(3) 上で作成したプログラムの説明を簡潔に記せ。