平成１４年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１３年８月２２日（水）

１４時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１６題であり、これらの中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに 科目名，専攻名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

B1 G を有限群とし、p を G の位数を割る 1 つの素数とする。このとき、次の各設問に答えよ。

(1) N を G の正規部分群とし、P を N の Sylow p-部分群とするとき、P が N の正規部分群ならば、P は G の正規部分群であることを示せ。

(2) 「N を G の正規部分群、H を N の正規部分群とするとき、H は G の正規部分群である」 という命題は正しくないことを、（4 次の対称群から）例をあげて示せ。

(3) q を p と異なる素数とし、G の位数を pq とするとき、G は 正規な Sylow 部分群をもつことを示せ。

B2 p を素数、$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる環、また $p\mathbb{Z}$ を p の倍数全体とする。さらに、S を p で割り切れない整数全体とする。つまり、$S = \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ である。

(1) $p\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアルであることを示せ。

(2) $a, b \in S$ であれば、$ab \in S$ であることを示せ。

(3) 有理数全体 $\mathbb{Q}$ の部分集合 R を

$$R = \{ \ \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \mid a \in S, \ b \in \mathbb{Z} \ \}$$

と定義する。このとき、R は有理数の足し算とかけ算で環になっている（これは証明しなくてよい）。R の部分集合 M を

$$M \ = \ \{ \ \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \mid a \in S, \ b \in p\mathbb{Z} \ \}$$

と定義する。このとき、M は R のただ１つの極大イデアルであることを示せ。

$\boxed{\textbf{B3}}$　$\mathbb{Q}$ を有理数体、$\mathbb{F}_5$ を 5 個の元からなる有限体とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 多項式 $x^3 - 3 \in \mathbb{F}_5[x]$ の $\mathbb{F}_5$ 上の最小分解体は、$\mathbb{F}_5$ 上何次の体であるか。

(2) 多項式 $x^3 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 L を求めよ。また、

(i) 拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を求めよ。

(ii) $L/\mathbb{Q}$ の中間体のうち、$\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であるものをすべて求めよ。

ただし、ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ に対して、$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は L の $\mathbb{Q}$-自己同型写像全体のなす群である。

$\boxed{\textbf{B4}}$　xy-平面 $\mathbb{R}^2$ から原点 $(0,0)$ を除いた領域を U とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) U 上で定義された 1 次微分形式 $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ ($a(x,y), b(x,y)$ は U 上定義された C^∞ 関数) が U 上定義された C^∞ 関数 f を用いて $\omega = df$ と書けたとすると、U 内の滑らかな単純閉曲線 C について常に $\displaystyle\int_C \omega = 0$ が成立することを示せ。ここで df は f の外微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ を表す。

(2) U 上で定義された 1 次微分形式 $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ を考える。U 上で定義された C^∞ 関数 f で $df = \omega$ をみたすものは存在しないことを示せ。

$\boxed{\textbf{B5}}$　xy-平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線全体のなす集合を $\mathcal{L}$ とする。すなわち $\mathcal{L}$ の各元は $y = ax + b$ と表される直線か、x-軸に直交する直線 $x = c$ である。次の各問いに答えよ。

(1) x-軸とちょうど 1 点で交わる直線全体のなす $\mathcal{L}$ の部分集合を U、y-軸とちょうど 1 点で交わる直線全体のなす $\mathcal{L}$ の部分集合を V とおく。$\mathcal{L}$ は $\{U, V\}$ を座標近傍系とする実 2 次元微分可能多様体となることを示しなさい。

(2) 原点を通る直線全体のなす $\mathcal{L}$ の部分集合を $\mathcal{P}$ とおく。$\mathcal{P}$ は $\mathcal{L}$ の 1 次元部分多様体で、円周と位相同型であることを示しなさい。

(3) 包含写像 $i : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ はホモトピー同値写像であることを示しなさい。

$\boxed{\textbf{B6}}$

(1) 3 次元球面
$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$
から 1 点を除いた空間は、3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ と位相同型であることを示しなさい。

(2) $\mathbb{R}^3$ の中の円周 $C = \{(\cos\theta, \sin\theta, 0) \in \mathbb{R}^3 | \ 0 \le \theta < 2\pi\}$ を問 (1) の結果によって S^3 の部分集合とみなすとき、補空間 $S^3 - C$ は　円周 C とホモトピー同値であることを示しなさい。

(3) 整数 j に対し、C_j で問 (2) の円周 C をベクトル $(2j, 0, 0)$ で平行移動した図形を表す。すなわち $C_j = \{(2j + \cos\theta, \sin\theta, 0) \in \mathbb{R}^3 | \ 0 \le \theta < 2\pi\}$ である。自然数 k に対し、$\mathbb{R}^3$ の図形 G_k を $G_k = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{k-1}$ で定義する。問 (2) と同様に $G_k \subset S^3$ とみなすとき、補空間 $S^3 - G_k$ の整係数ホモロジー群 $H_*(S^3 - G_k; \mathbb{Z})$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$

(1) 複素関数論におけるコーシーの積分公式を述べよ。

(2) $k = 1, 2, 3$ に対して

$$I_k = \int_{|z|=k/3} \frac{e^{iz}}{2\overline{z} + i} dz$$

を求めよ（ただし $\overline{z}$ は z の複素共役を表す）。

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 4} dx$$

を留数定理を用いて計算せよ。ただし、どのようにして留数計算に帰着できるかの証明も与えること。

$\boxed{\textbf{B8}}$ 実数空間 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度を μ で表わし、$f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ への関数で、$\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分とする。

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\},$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in E_n) \\ 0 & (x \notin E_n) \end{cases}$$

とおくとき、以下の命題を証明せよ。

(1) 各 n に対して $\mu(E_n)$ は有限である。

(2) 殆どすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

(3) $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$.

B9 未知関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$ に関する次の連立常微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_1(t) + (2t^{-2} - 1)x_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}x_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

(1) $\dfrac{d^2}{dt^2}x_1,\ \dfrac{d^2}{dt^2}x_2$ を、t の有理式を係数とする、x_1, x_2 の一次結合で表せ。

(2) t^2 と t^{-1} は未知関数 $y(t)$ に関する微分方程式 $t^2\dfrac{d^2}{dt^2}y = 2y$ の解であることを示せ。

(3) 問題の連立常微分方程式の解で, $(x_1(1), x_2(1)) = (3, 2)$ となるものを求めよ。

B10 複素平面の単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ で定義された正則関数 $f(z)$ で

$$||f|| := \left(\frac{1}{2\pi}\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{\sqrt{-1}\theta})|^2 d\theta\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となるもの全体のなす、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線型空間を $\mathcal{H}$ と書く。

(1) $\mathcal{H}$ の元 $f(z)$ に対し、原点を中心とする $f(z)$ の Taylor 展開の係数を用いて $||f||$ を表せ。

(2) $||\cdot||$ は $\mathcal{H}$ 上のノルムであることを示せ。(従って $\mathcal{H}$ は複素ノルム空間である。)

(3) $\mathcal{H}$ は（複素）ノルム空間として、l^2 と同型であることを示せ。但し、「２つのノルム空間 E, F がノルム空間として同型」とは、 E から F への全射かつ単射な線型写像 T でノルムを保つ（すなわち、$||Tx|| = ||x||$ が全ての $x \in E$ について成り立つ）ようなものが存在することとする。

参考： l^2 は複素数列 $a = (a_n)_{n=0,1,2,\cdots}$ で $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$ となるものの全体を表し、内積 $(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n}$ によりヒルベルト空間であり、従って特に内積から決まるノルムに関してバナハ空間である。

$\boxed{\textbf{B11}}$ X の離散密度関数 f_X が $f_X(x) = \dfrac{x}{3},\ x = 1, 2$ であり、X が与えられた時の Y の条件付確率密度 $f_{Y|X}$ が

$$f_{Y|X}(y|x) = P[\ Y = y \mid X = x\ ] = {}_xC_y \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = 0, \ldots, x$$

であるとする。このとき

(1) X の平均 $E[X]$, 分散 $var[X]$ を求めよ。

(2) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ。

(3) X と Y の結合分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B12}}$ X_1, X_2 を独立な標準正規確率変数であるとする。$Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1^2 + X_2^2$ とおく。このとき

(1) Y_1 と Y_2 の結合積率母関数 $\varphi(t_1, t_2) = E[\exp\{t_1 Y_1 + t_2 Y_2\}]$ は

$$\frac{1}{1-2t_2} \exp\left\{\frac{t_1^2}{(1-2t_2)}\right\}, \quad t_1 \in (-\infty, \infty),\ t_2 \in (-\infty, \frac{1}{2}),$$

であることを示せ。

(2) Y_1 と Y_2 の相関係数を求めよ。

$\boxed{\textbf{B13}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を 1 次元連続型分布の分布関数 F からの大きさ n のランダム標本とする。経験分布関数

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \le x\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

を考える。ただし、

$$I\{X_i \le x\} = \begin{cases} 1, & X_i \le x, \\ 0, & X_i > x, \end{cases}$$

である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) x を固定したとき、$\widehat{F}_n(x)$ は $F(x)$ の不偏推定量であることを示し、その分散を求めよ。

(2) x を固定したとき、$\widehat{F}_n(x)$ は $F(x)$ の弱一致推定量であることを示せ。

(3) $n = 1$ の場合を考える。

$$D = \sup_{-\infty<x<\infty} |\widehat{F}_1(x) - F(x)|$$

とおく。このとき、D が a 以下になる確率 $P(D \le a)$, $-\infty < a < \infty$, を a を用いて表せ。

$\boxed{\textbf{B14}}$ 次の再帰的な式によって自然数上の関数 f を定義する。

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \textbf{if } x > 100 \textbf{ then } x - 10 \\ & \textbf{else } f(f(x+11)) \end{aligned}$$

(1) $f(98)$ を求めよ。(途中の計算過程もわかるように書くこと。)

(2) 任意の自然数 x について $f(x)$ の値が存在することを、$f(x)$ の値を非再帰的な式で表わすことにより証明せよ。

(3) $f(x)$ を上の再帰的な式で計算している途中で f が呼ばれる回数を求めよ。

B15 ラムダ項 S, K, B を $S \equiv \lambda xyz.xz(yz), K \equiv \lambda xy.x, B \equiv S(KS)K$ と定義する。ここで, ラムダ項の足りない括弧は左から補うものとする。

(1) ３つのラムダ項 $SKKx$, $Bxyz$, $S(BBS)(KK)xyz$ の β-正規形をそれぞれ求めよ (計算の途中経過も書くこと)。

(2) ラムダ項全体の集合を Λ, S と K と変数から関数適用 (application) だけをもちいて作られるラムダ項全体の集合を Ω とする。Λ から Ω への変換 * を次のように帰納的に定義する。

1. $M^* \equiv M \quad \text{if} \quad M \in \Omega$;
2. $(\lambda x.M)^* \equiv KM^* \quad \text{if} \quad x \notin FV(M)$;
3. $(\lambda x.x)^* \equiv SKK$;
4. $(\lambda x.MN)^* \equiv S(\lambda x.M)^*(\lambda x.N)^* \quad \text{if} \quad x \in FV(MN)$;
5. $(\lambda xy.M)^* \equiv (\lambda x.(\lambda y.M)^*)^*$;
6. $(MN)^* \equiv M^*N^*$.

ここで, 適用できる規則が二つ以上あるときは番号が若い規則を適用するものとする。このとき,

$$M^* \rhd M$$

となることを証明せよ。ここで $\rhd$ は左のラムダ項から右のラムダ項に何回かの $\beta-$変形で移ることを表している。また, $FV(M)$ はラムダ項 M に現れる自由変数の集合を表している。

B16 次の Scheme のプログラムについて、以下の問いに答えよ。

```
(define (parts xs)
  (if (null? (cdr xs)) (list (list xs))
      (let ((p (parts (cdr xs))) (x (car xs)))
        (append (map (glue x) p) (map (single x) p)))))

(define (glue x)
  (lambda (xss) (cons (cons x (car xss)) (cdr xss))))
(define (single x)
  (lambda (xss) (cons (list x) xss)))
```

(1) `(parts '(1 2))` の値を求めよ。

(2) `(parts '(`$v_1 \cdots v_n$`))` (ただし $n \geq 1$) の値はどのようなものであるか述べ、その長さも求めよ。