平成１５年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１３年８月２１日（水）

１４時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は１６題であり、これらの中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに 科目名，専攻名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、
１枚に１題だけ を解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{B1}}$　群 G の部分群 H, K を考える。

$$N = \{g \in G \mid g^{-1}Kg = K\}$$

とし，さらに，$X = H \cap N, Y = H \cap K$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) XK が G の部分群であることを示せ。

(2) 等式 $XK = HK \cap N$ が成り立つことを示せ。

(3) Y は X の正規部分群であることを示せ。

(4) 剰余群 X/Y は N/K のある部分群に同型であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B2}}$　R は可換環で L, M は R-加群とし、L から M への R-準同型写像からなる R-加群を $\mathrm{Hom}_R(L, M)$ で表す。$a \in R$ は M 上の非零因子 ($0 \neq x \in M$ ならば $ax \neq 0$) とする。

(1) a は $\mathrm{Hom}_R(L, M)$ 上の非零因子でもあることを示せ。

(2) さらに $b \in R$ は剰余加群 M/aM 上の非零因子とせよ。但し $aM = \{ax \mid x \in M\}$ である。$N = \mathrm{Hom}_R(L, M)$ とおくと b は N/aN 上の非零因子でもあることを示せ。

B3

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\sqrt[5]{2}$ を付け加えて得られる体 $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ について, 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

また, $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q})$ を求めよ.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ を含む $\mathbb{Q}$ の最小のガロア拡大体を L とする.

拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

また, ガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の構造を決定せよ.

(3) $\mathbb{F}_5$ のガロア拡大体 K で, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_5) \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を満たすものは存在するか.

B4

(1) 空間の曲面の第２基本量を定義せよ。

(2) ２次元球面の第２基本量を求めよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$

(1) 微分可能多様体 M の接ベクトル空間を定義せよ。

(2) 微分可能多様体 M から微分可能多様体 N への写像 f が微分可能であることを定義し、f の微分写像を局所座標系に関して行列表現せよ。

$\boxed{\textbf{B6}}$ K_1 を４つの 0-単体 P, Q, R, S と４つの 1-単体 PQ, QR, RP, PS からなる複体とし、K_2 を K_1 に更に１つの 2-単体 PQR を加えてできる複体とする。次の問いに答えよ。

(1) 多面体 $|K_1|$ と $|K_2|$ を図示せよ。

(2) K_1 と K_2 の 0 次元、1 次元、2 次元ホモロジー群を計算せよ。

(3) $|K_1|$ と $|K_2|$ が同相（位相同型）でないことを示せ。

B7 D は複素平面の領域で、$f(z)$ は D で正則な関数とする。

(1)

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & (z \neq w) \\ \\ f'(z) & (z = w) \end{cases}$$

によって、$D \times D$ 上の関数 g を定めるとき、g は $D \times D$ 上で連続であることを示せ。

(2) さらに、点 $z_0 \in D$ で $f'(z_0) \neq 0$ とする。(1) を用いて、$f : V \to f(V)$ が一対一写像となる z_0 の近傍 $V \subset D$ がとれることを示せ。

B8 $f(x)$ は開区間 (a,b) 上で微分可能で、$f'(x)$ は (a,b) 上で有界とする。関数列

$$\varphi_n(x) = n\{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\}$$

を用いて、

$$\int_c^d f'(t)dt = f(d) - f(c) \quad (a < c < d < b)$$

を示せ。

$\boxed{\textbf{B9}}$

(1) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (1-x)x, \qquad t \geq 0, \quad x \geq 0$$

の解の様子を図示し説明しなさい。

(2) $f(x) \in C^1$ は $x \geq 0$ に対して定義された増加関数で次を満たすとする。

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = (1-f(x))x, \qquad t \geq 0, \quad x \geq 0$$

の解の様子を図示し説明しなさい。

$\boxed{\textbf{B10}}$ 複素数の無限数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して以下のような集合とノルムを考える.

$$\ell^1 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}, \quad \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$
$$c_0 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$$

数列の和, スカラー倍によって $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ は Banach 空間になっている.

(1) $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

が存在すること, および

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

によって f が c_0 上の有界線形汎関数になることを示せ.

(2) c_0 上の任意の有界線形汎関数 g に対して

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad \forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$$

となる $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ が存在することを示せ.

$\boxed{\textbf{B11}}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が確率変数 X に収束するとき、次の問に答えよ。

(1) 確率変数列に関する次の３つの収束の定義を述べよ。
(a) 概収束 (b) 確率収束 (c) 法則収束

(2) (a) ならば (b) を証明しなさい。

(3) (b) であるが (a) でない例 と (c) であるが (b) でない例 を示しなさい。

(4) $X = c$ (定数) のとき、(c) ならば (b) が成立する ことを証明しなさい。

$\boxed{\textbf{B12}}$ 確率変数 X の密度関数を $f(x)$, その分布関数を $F(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ とし, $n \geq 2$ は正の整数とする。このとき，つぎの各問に答えよ。

(1) ２変数関数

$$h(x,y) = \begin{cases} n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2}f(x)f(y), & -\infty < x < y < \infty \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

は，２変量の結合密度関数となることを示せ。

(2) 結合密度関数 $h(x,y)$ において，変数変換 $r = y - x, t = (x+y)/2$ を施した結合密度関数 $f_{R,T}(r,t)$ を計算しなさい。

(3) とくに確率変数 X が区間 $(-a,a)$（ただし $a > 0$ ）上の一様分布にしたがうとき，結合密度関数は

$$f_{R,T}(r,t) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{(2a)^n} r^{n-2}, & (r,t) \in D \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

（ここで $D = \left\{(r,t) \,|\, 0 < r, -a + \frac{r}{2} < t < a - \frac{r}{2}\right\}$ ）で与えられることを示せ。

$\boxed{\textbf{B13}}$ 以下の各問いに答えよ。

(1) パラメータ θ の離散型分布の確率関数を $f(x,\theta)$ $(x=1,2,\cdots\cdots)$ とする。帰無仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ を対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1$ に対して検定するとき、有意水準 α の最強力検定関数 $\phi^*(x)$ は次で与えられることを示せ。

$$\phi^*(x)=\begin{cases} 1 & \dfrac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}>c \text{ のとき} \\ 0 & \dfrac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}<c \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで c は $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}\phi^*(x)f(x,\theta_0)=\alpha$ を満たす定数である。

[註] $\phi^*(x)$ は次の性質を満たす。

(i) $0\leq\phi^*(x)\leq 1$,

(ii) $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}\phi(x)f(x,\theta_0)\leq\alpha,\ 0\leq\phi(x)\leq 1$ を満たす任意の検定関数 $\phi(x)$ に対して

$$\sum_{x=1}^{\infty}\phi(x)f(x,\theta_1)\leq\sum_{x=1}^{\infty}\phi^*(x)f(x,\theta_1).$$

[ヒント] $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}\phi(x)f(x,\theta_1)-c\alpha$ を最大にする $\phi(x)$ が $\phi^*(x)$ であることを示せ。

(2) 6 回のコイン投げの結果に基づいて、このコインの表の出る確率 p に関する仮説検定を行う。帰無仮説を $H_0:p=\frac{1}{2}$, 対立仮説を $H_1:p=\frac{3}{4}$ とし、6 回のコイン投げにおいて表の出た回数 X を検定統計量とする。(1) の結果より、この場合の最強力検定は $X>k$ のとき H_0 を棄却、$X=k$ のとき確率 q で H_0 を棄却、$X<k$ のとき H_0 を採択すればよいことを示し、k および q の値を求めよ。ただし $\alpha=0.05$ とする。

(3) (2) のとき、この検定の検出力 (H_1 を正しく棄却する確率) を求めよ。

$\boxed{\textbf{B14}}$

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする。また $p_1,\ldots,p_n$ を相異なる素数とする。このとき、すべての $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}$ $((e_1,e_2,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n)$ を計算するために必要な $\mathbb{N}$ 上の乗算回数を $N(n)$ で表わすとする。例えば $n=2$ のとき、$p_1^0p_2^0,\ p_1^1p_2^0,\ p_1^0p_2^1,\ p_1^1p_2^1$ の 4 つの数を求める必要があるが、最初の 3 つはそれぞれ $1,\ p_1,\ p_2$ となり、自明もしくは、始めから与えられているので、新たに計算する必要はない。したがって、この場合には p_1p_2 の 1 回の乗算のみが必要とされるので、$N(2)\leqq 1$ と評価できる。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $N(3)$ を評価せよ。

(2) 自然数 n に対して $N(n)$ を評価せよ。

$\boxed{\textbf{B15}}$

(1) 自然数 n $(n \geq 0)$ に対して λ 項 $\overline{n}$ を $\overline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda fz.f^n(z)$ と定める。ただし、M と N を λ 項としたとき $M^n(N)$ は $\underbrace{M(M(\cdots(M}_{n}N)\cdots))$ の略である。このとき、$(\lambda xy.yx)\,\overline{m}\,\overline{n}$ (ただし $n \geq 1$) の β-正規形を求めよ。

(2) λ 項 a_1, ..., a_n が与えられたとき、λ 項 $[a_1, \ldots, a_n]$ を以下のように定義する。(ただし変数 f, z は a_1, ..., a_n の自由変数には含まれないとする。)

$$
\begin{aligned}
[a_1, \ldots, a_n] &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda fz.(a_1, \ldots, a_n) \\
() &\stackrel{\text{def}}{=} z \\
(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) &\stackrel{\text{def}}{=} f\,a_i\,(a_{i+1}, \ldots, a_n)
\end{aligned}
$$

このとき、A $[a_1, \ldots, a_n]$ $[b_1, \ldots, b_m]$ の β-正規形が $[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$ となるような λ 項 A を求めよ。

B16 次のように Scheme で書かれたプログラムがある。

```
(define (expr e) (cadr (fexpr e '(($)))))

(define (fexpr e s)
   (if (null? e) (pop-all s)
       (if (list? e)
           (let* ((op (car e)) (p (assq op prec-table)))
              (if p (fexpr (cdr e) (prec op (cadr p) s))
                    (fexpr (cdr e) (cons (car s) (cons (car e) (cdr s))))))
           #f)))

(define (prec op p s)
   (if (null? (car s)) (cons (list op) (cdr s))
      (if (< (cddr (assq (car (car s)) prec-table)) p)
           (cons (cons op (car s)) (cdr s))
           (prec op p (cons (cdar s) (pop-expr (car (car s)) (cdr s)))) )))

(define (pop-all s)
   (if (eq? (caar s) '$) s
       (pop-all (cons (cdar s) (pop-expr (caar s) (cdr s)))) ))

(define (pop-expr op e)
   (cons (list op (cadr e) (car e)) (cddr e)))

(define prec-table '((+ 1 . 2) (- 1 . 2) (* 3 . 4) (/ 3 . 4) ($ 0 . 0)))
```

1. このプログラムを用いて、次の計算をした結果を記せ。

   (a) `(pop-expr '* '(c b a))`

   (b) `(pop-all '((* + $) c b a))`

   (c) `(prec '* 4 '((+ $) b a))`

   (d) `(fexpr '(c) '((* + $) b a))`

2. `(expr '(a + b * c))` の実行結果は `(+ a (* b c))` である。この例を用いて、上のプログラムの働きを説明せよ。