平成１６年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数学Ｂ

平成１５年８月２０日（水）

１４時００分〜１６時３０分

「注意事項」

1. 問題は１６題であり、これらの中から任意に３題選んで解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は３枚あるので、そのすべてに科目名，専攻名と受験番号を記入のこと。

3. 各解答用紙には、解答しようとする問題番号を明記し、
１枚に１題だけを解答すること。
解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{B1}}$ G を有限群、H は G の部分群とする。
このとき、次を示せ。

(1) $x \in G$ に対して、$x^{-1}Hx$ は G の部分群である。($x^{-1}Hx$ を H の共役部分群という。)

(2) $N_G(H) = \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H\}$ は、H を正規部分群として含む G の部分群の中で、最大の部分群である。

(3) H の共役部分群の個数は、指数 $[G : N_G(H)]$ に等しい。

(4) $G = \displaystyle\bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx$ ならば、$G = H$ である。

$\boxed{\textbf{B2}}$ 実数体 $\mathbb{R}$ 上の 2 次行列環 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 A を以下で定める。

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r \end{pmatrix} \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

以下の問いに答えよ。

(1) A は、$M_2(\mathbb{R})$ の部分環であることを証明せよ。

(2) $\mathbb{R}$ 上 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[X]$ から A への写像 ϕ を以下で定める。

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to A, \qquad r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n \ \mapsto \ \begin{pmatrix} r_0 & r_1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

$r_i \in \mathbb{R}$. このとき、ϕ は環の準同型かつ全射であることを証明せよ。

(3) (2) での ϕ に対して、 $\mathrm{Ker}\phi = (X^2)$ であることを証明せよ。

(4) A のイデアルをすべて求めよ。

$\boxed{\textbf{B3}}$ $\mathbb{Q}$ で有理数体を表す。$\mathbb{Q}$ 上の多項式 $f(x) = x^4 - 2$ を考え、$f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上最小分解体を L とする。

(1) L を求めよ。

(2) L の $\mathbb{Q}$ 上拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ。

(3) L は $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大体になっているが、このとき拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群 $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ γ を閉区間 $[0,1]$ から $\mathbb{R}^3$ への連続写像とする。γ が $[0,1]$ から像 $\gamma([0,1])$ の上への同相写像を与えており、$\gamma([0,1])$ が $\mathbb{R}^3$ 内のある平面 H に含まれるとき、同相写像 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって

$$\phi(\gamma([0,1])) = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

となるものを構成せよ。

B5 $\mathbb{R}^3$ 内の図形

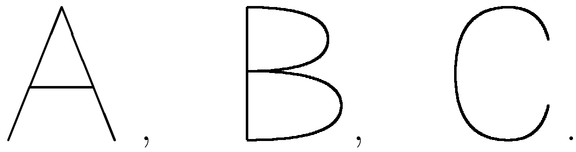
$$X = \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$$

を考える。

(1) X は可微分多様体であることを示しなさい。

(2) 関数 $f(x, y, z) = xyz$ を X に制限した関数 f_X の最大値、最小値を求めよ。

B6 次の 3 つ図形の整数係数ホモロジー群とオイラー標数を、それぞれについて求めよ。



B7

(1) 図形 $D=\{z\in\mathbf{C}: -1<\mathrm{Re(z)}\le 1/2, \pi/4\le \mathrm{Im(z)}<\pi/2\}$ を z-平面に図示し、関数 $w=f(z)=e^z$ による D の像 $f(D)$ を w-平面に図示せよ。

(2)

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{e^z-1} & (z\in\mathbf{C}-\{0\})\\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

は $z=0$ で正則かどうか結論を述べ、証明を与えよ。

(3)

$$\lim_{r\to 0}\int_{\delta(r)}\frac{e^{iz}}{z}dz$$

を求めよ。ただし $\delta(r)$ は $z=re^{i\theta},\quad(0\le\theta\le\pi)$ で与えられる半円である。

B8 $\mathbf{R}$ のルベーグ可測集合 A 上の実数値ルベーグ可測関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は以下を満たすものとする。

(i) 各 $f_n(x)$ は A 上でルベーグ積分可能、

(ii) A 上で関数 $f(x)$ に一様収束。

また A のルベーグ測度を $m(A)$ で表わす。このとき次の問いに答えよ。

(1) $m(A)<\infty$ ならば、$f(x)$ は A 上ルベーグ積分可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dm(x)=\int_A f(x)dm(x)$$

であることを示せ。

(2) $m(A)=\infty$ ならば (1) の結論は成り立つとは限らない。成り立たない A と関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の例を挙げ、その理由を述べよ。

$\boxed{\textbf{B9}}$ 実数値関数 $x(t)$, $y(t)$ を未知関数とする次の連立常微分方程式について以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-r) - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1-r) + x \end{cases}$$

ただし、$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ とする。

(1) $r(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。ただし、$r > 0$ のところのみを考察すればよい。

(2) $\xi(t) = \dfrac{x(t)}{r(t)}$, $\eta(t) = \dfrac{y(t)}{r(t)}$ とおき、ξ, η が満たす微分方程式を求めよ。ただし、$r > 0$ のところのみを考察すればよい。

(3) $(x(0), y(0)) = (2, 0)$ となる解 $(x(t), y(t))$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ X を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし、 $C(X)$ を X 上で定義された複素数値連続関数全体の集合とする。 $C(X)$ の元 $f(x)$ に対し

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

とおくとき

(1) $C(X)$ は、関数に対する通常の和とスカラー倍で複素線型空間であることを示せ。

(2) $||\cdot||$ は $C(X)$ 上のノルムであることを示せ。

(3) ノルム $||\cdot||$ により $C(X)$ は Banach 空間になることを示せ。

(4) Y を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合として、 コンパクト集合

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

上の連続関数 f をひとつ固定する。 任意の $g \in L^1(Y)$ に対して

$$Fg(x) = \int_Y g(y) f(x+y) dy$$

とおくとき、 F は $L^1(Y)$ から $C(X)$ への連続写像であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B11}}$ ガンマ関数を Γ とおく:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad s > 0.$$

そして $\mathcal{B}$ を 1 次元ボレル集合族とし、確率分布 $\gamma_{r,a}$ $(r > 0, a > 0)$ をガンマ分布とする:

$$\gamma_{r,a}(B) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{B \cap (0,\infty)} (rx)^{a-1} e^{-rx} r dx, \quad B \in \mathcal{B}.$$

X を $\gamma_{r,a}$ に従う確率変数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 確率変数 X の積率母関数を求めよ。

(2) $c > 0$ のとき、確率変数 $Y = cX$ の確率分布を求めよ。

(3) $r = \dfrac{1}{2v}$ $(v > 0), a = \dfrac{1}{2}$ のとき、確率変数 $Z = X^{1/2}$ の確率分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B12}}$

(1) K 個の不良品を含む M 個の玉が入っている箱から、サイズ n の標本を**復元抽出**した。抽出した n 個の中に含まれる不良品の数を X としたとき、X の分布、平均、分散を求めよ。

(2) K 個の不良品を含む M 個の玉が入っている箱から、サイズ n の標本を**非復元抽出**した。抽出した n 個の中に含まれる不良品の数を Y としたとき、Y の分布、平均、分散を求めよ。

$\boxed{\textbf{B13}}$ n 個の無作為標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は密度関数

$$f(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \quad , x = 0, 1, 2, 3, \ldots (\lambda > 0)$$

から抽出されたものである。

(1) X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の平均 $E(X_i)$ と分散 $V(X_i)$ を計算せよ。

(2) $t(\lambda) = e^{-\lambda}$ とするとき、統計量

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{0\}}(X_i)$$

は $t(\lambda)$ の不偏推定量であることを示せ。ここで

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

である。

(3) パラメータ λ を未知とする $t(\lambda)$ の推定量についてクラメール・ラオの不等式の下限は

$$\frac{(t'(\lambda))^2}{nE\left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\log f(X_i;\lambda)\right)^2}$$

（ただし $t'(\lambda)$ は導関数を表す）で与えられる。これから (2) で与えた推定量 T の分散 $V(T)$ が

$$V(T) \geq \frac{\lambda}{n}e^{-2\lambda}$$

を満たすことを示せ。。

B14 α を有限体 GF(2^3) の原始元とし、α の GF(2) 上の最小多項式を x^3+x+1 とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) GF(2^3) の各元の間の加算表を作れ。

(2) GF(2^3) の上の x, y, z に関する次の連立一次方程式を解け。

$\alpha^3 x + \alpha y + z = \alpha^6$

$\alpha^6 x + \alpha^5 y + \alpha^2 z = \alpha^3$

$\alpha x + \alpha^4 y + z = \alpha^6$

(3) 多項式 x^3+x+1 を GF(2^3) において因数分解したときの α の共役根を記せ。また、元 α^3 の GF(2) 上の最小多項式を求めよ。

(4) GF(2^3) 上の多項式 $c(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{6} c_i x^i$ は、2 次多項式 $g(x) = (x-1)(x-\alpha)$ で割り切れるように定められるものとする。ここで, 多項式 $r(x), e(x)$ および $c(x)$ が、以下の式を満たすとき、$e(x)$ の非零の項の数が最も少なくなるように多項式 $c(x)$ を定めよ。

$r(x) = c(x) + e(x)$

$r(x) = \alpha x^6 + \alpha^3 x^4 + \alpha^3 x^3 + \alpha x^2 + \alpha^3 x + 1$

$\boxed{\textbf{B15}}$ まず、論理体系 BI+ を定義する。体系 BI+ の論理式は論理記号 '$\rightarrow$' と命題変数から作られた命題論理式である。体系 BI+ の公理型は次の 2 つである。

$$\begin{array}{ll} (B) & (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \\ (I) & \alpha \rightarrow \alpha \end{array}$$

ここで、論理式の足りない括弧は右から補うものとする。すなわち、$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ は $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ を表している。体系 BI+ の推論規則は次の MP と MP2 の 2 つである。

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}\,(MP), \qquad \frac{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \quad \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}\,(MP2)$$

体系 BI+ の証明図とは公理たちを上端とする木状の図形であり、下端にある論理式がその証明図で証明されたことになる。上端にくる論理式として公理以外のものを認めたものを推論図ということにする。ただし規則 MP2 の β の上の上端は全て公理とする。この β が推論規則の結論でないときは β 自身が公理である。

Π を体系 BI+ の推論図とする。Π の上端に現れる公理でない論理式を左から順に全て並べたものが Γ で、下端にある論理式が γ のとき、$\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ と書く。ここで、公理でない論理式 α が上端にちょうど n 個現れるならば、Γ にはちょうど n 個の α が現れている。普通と違って Γ に現われる論理式の順番や個数が重要であることに注意せよ。

$\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ となる推論図 Π が存在するとき、$\Gamma \vdash \gamma$ とかく (この '$\vdash$' の意味は上述のように普通と異なっているので注意せよ)。$\Pi(\Gamma \vdash \gamma)$ のとき推論図 Π が $\Gamma \vdash \gamma$ を示すという。

このとき、 $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ を示す推論図の長さについての帰納法を用いて、次のことを証明せよ。

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \text{ ならば } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \text{ である。}$$

[**註**] 体系 BI+ は次の性質を満たす。このことは証明せずに用いてよい。

$$\vdash \delta \text{ ならば } \vdash (\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \eta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \eta \text{ である。}$$

B16 下の Scheme によるプログラムについて次の問いに答えよ。

(1) `(calc '(+ 1 2))` の結果を記せ。

(2) `(calc '(1 2 +))` の結果を記せ。

(3) `calc` を呼び出したとき、`error` が呼ばれないような引数の一般形を記せ。

(4) 上の問いの一般形の引数であるとき、`calc` の引数と関数値の関係を簡潔に述べよ。

```
(define (calc e)
  (let ((a (ev e '())))
     (if (null? a) (error "stack underflow: " a a) (car a))))

(define (ev e a)
  (if (null? e) a
    (ev (cdr e)
      (cond ((number? (car e)) (cons (car e) a))
            ((symbol? (car e))
                (let ((o (assq (car e) operators)))
                      (if o (binary (cdr o) a)
                          (error "illegal operator: " (car e) a)
            )))
            (else (error "illegal token: " (car e) a))
      )
  ))
)

(define (binary op a)
  (if (< (length a) 2) (error "lacking operands: " a a)
      (cons (op (car a) (cadr a)) (cddr a)))
)

(define (pairlis x y a)
            (if (null? x) a (cons (cons (car x) (car y))
                                  (pairlis (cdr x) (cdr y) a))))

(define operators
    (pairlis '(+ - * /) (list + - * /) '()))

(define (error m s v)
  (display m) (display s) (newline) v)
```