平成１７年度
自然科学研究科 博士前期課程
学力検査問題
（数学・情報数理学専攻）

数学

平成１６年８月１８日（水）

１２時３０分〜１６時３０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。
   A 問題 A1, . . ., A5 の中から任意に３題選んで解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）
   B 問題 B1, . . ., B12 の中から任意に１題選んで解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので、そのすべてに科目名，受験番号を記入のこと。

3. 各解答用紙の正方形空欄に、解答しようとする問題番号を明記し、
   １枚に１題だけを解答すること。
   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ X と Y を２つの集合とする。f を X から Y への写像とする、すなわち、$f : X \longrightarrow Y$ とする。A,B をそれぞれ X,Y の部分集合とする。

(1) f が単射であることと全射であることを定義せよ。

(2) f による A の像 $f(A)$ と f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ を集合の記号を用いて記述せよ。

(3) ２つの集合 A と $f^{-1}(f(A))$ の包含関係を記述し、それを証明せよ。

$\boxed{\textbf{A1}}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ として定める。n を $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$ となるような最小の自然数とする。

(1) f の核 $\mathrm{Ker} f$ を求めよ。

(2) f の固有値および固有空間を求めよ。

(3) n を求めよ。

(4) f^n の固有値および固有空間を求めよ。

(5) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker} f^n \oplus \mathrm{Im} f^n$ であることを証明せよ。

ただし, 線形変換 g に対し, $\mathrm{Ker} g$, $\mathrm{Im} g$ はそれぞれ g の核空間, 像空間を表す。

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) $x > 0, y > 0$ とするとき

$$|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$$

が成り立つことを示せ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ が収束することを示せ。

(3) $f(x)$ を $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする。

(i) $0 < \alpha < \beta$ とするとき

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{x}\,dx = f(\gamma)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}$$

なる γ が $\alpha < \gamma < \beta$ の範囲に存在することを示せ。

(ii) $0 < \delta < T,\ 0 < a < b$ とするとき

$$\int_\delta^T \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dx}{x} - \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

を満たす ξ が $a\delta < \xi < b\delta$ の範囲に存在することを示せ。

(4) $0 < a < b$ とするとき

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0, T\to\infty} \int_\delta^T \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

であることを示せ。

A3

(1) 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトであることの定義（開被覆を用いるもの）を述べよ。

(2) f を位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とする。このとき、次の 2 つの命題それぞれについて、それが正しければ証明し、誤りならば反例をあげよ。

(i) A を X のコンパクトな部分集合とする。このとき、f による A の像 $f(A)$ は Y のコンパクト部分集合である。

(ii) B を Y のコンパクトな部分集合とする。このとき、f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ は X のコンパクト部分集合である。

(3) ハウスドルフ空間 X のコンパクト部分集合 A は閉集合であることを証明せよ。

(4) 2 点からなる集合 $X = \{p, q\}$ に適当に位相を導入して、X が次の性質をみたす部分集合 A をもつようにせよ: A はコンパクトであるが閉集合ではない。

A4 各面に 1 から 4 までの番号を付けてある赤と青の正四面体を投げる。確率変数 X, Y を次のようにする。

X : 赤の正四面体の下を向いた面に書かれた数字
Y : 2 つの正四面体の下を向いた面に書かれた数字のうち大きくない方の数字

(1) (X, Y) の離散密度関数 $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ を求めよ。

(2) $X = 3$ が与えられたときの Y の条件つき期待値 $E[Y|X = 3]$ を求めよ。

(3) (X, Y) の共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を求め，(X, Y) が独立でないことを示せ。

A5　次の Pascal によるプログラムを考える。

```
program test(input, output);
var x, y, z: integer;
begin
  readln(x, y);
  z := 1;
  while y > 0 do
    if y mod 2 = 0 then
      begin
        x := x * x;
        y := y div 2;
      end
    else
      begin
        z := z * x;
        y := y-1;
      end;
  writeln(z);
end.
```

(1) 入力として 2 と 5 を与えたとき、while 文の条件判定の各時点で変数 x, y, z がどのような値を取るかを表の形で記し、さらに出力される数を記せ。

(2) 入力として自然数 n と m を与えたとき、出力される数を n と m を使って表わせ。(理由も述べること。)

$\boxed{\textbf{B1}}$ G を有限群とする。$a \in G$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \{\ a^i \mid i \in \mathbb{Z}\ \}, \\ a^G &= \{\ g^{-1}ag \mid g \in G\ \}, \\ N_G(a) &= \{\ g \in G \mid g\langle a \rangle = \langle a \rangle g\ \}, \\ C_G(a) &= \{\ g \in G \mid ga = ag\ \}, \end{aligned}$$

と定義する。

(1) $C_G(a)$ は $N_G(a)$ の正規部分群であることを証明せよ。

(2) 集合 a^G の元の個数は，指数 $[G : C_G(a)]$ に等しいことを証明せよ。

G を n 次対称群とし，$a = (1\ 2\ \cdots\ n)$ は

$$a(1) = 2, a(2) = 3, \ldots, a(n-1) = n, a(n) = 1$$

で定義される G の元とする。

(3) $C_G(a)$ の位数を求めよ。

(4) p が奇素数で $n = 2p$ のとき $N_G(a)$ の位数を求めよ。

$\boxed{\textbf{B2}}$ k を体, $A = k[X, Y, Z]/(X - Y^2 - Z^3)$ とする。

(1) (Y, Z) が A の極大イデアルであることを示せ。

(2) (X) が A の素イデアルであることを示せ。

(3) $(X - Y^2)$ は A の素イデアルではないことを示せ。

B3 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合 S^n を次のように定義する。

$$S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {x_1}^2 + \cdots + {x_{n+1}}^2 = 1\}$$

(1) S^n は n 次元可微分多様体となることを示せ。

(2) S^n の任意の点 p に対して、$\mathbb{R}^{n+1}$ の点としての p の第 i 座標 $(i = 1, \cdots, n+1)$ を $f_i(p)$ で表すとき、各 f_i は S^n から $\mathbb{R}$ への可微分写像であることを示せ。

B4 $\mathbb{R}$ は数直線とし、S^1 は円周 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする。f を S^1 から S^1 への連続写像とする。

(1) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続写像はすべて定値写像にホモトピックであることを証明せよ。

(2) f が全射でないとき、f は定値写像にホモトピックであることを証明せよ。

(3) 次の命題は正しいか。正しければ証明し、まちがっていれば反例をあげよ。

「f が全射ならば、f は定値写像にホモトピックでない。」

(4) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続写像 g が $p \circ g = f \circ p$ をみたすとき、g は f のリフトであるという。ただし、 $p : \mathbb{R} \to S^1$ は $p(t) = (\cos t, \sin t)$ により定義される写像である。さて、f が全射でないとき、f のリフト g について、$g(0) = g(2\pi)$ が成り立つことを示せ。

B5 $r > 0$ に対して、a を $|a| \neq r$ となる複素数、$f(z)$ は円 $|z| \leq r$ を含む領域で正則な関数、C を正の向きにまわる円周 $|z| = r$ とするとき、

$$\int_C \frac{f(z)}{z|z-a|^2} dz$$

を求めよ。

$\boxed{\textbf{B6}}$

(1) 同次線形微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 5x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_1 - x_2\end{aligned}$$

の解を $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -5y_1 - 4y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + y_2\end{aligned}$$

の解を $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ とする。この時

$$\frac{d}{dt}\{y(t)^T x(t)\} = 0$$

を示せ。ここで $y(t)^T$ は $y(t)$ を転置したものを意味する。

(2) 一般に、A を $N \times N$ 行列、x, y を N 項列ベクトルとする。同次線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の解を $x(t)$,

$$\frac{dy}{dt} = -A^T y$$

の解を $y(t)$ とする。この時

$$\frac{d}{dt}\{y(t)^T x(t)\} = 0$$

を示せ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数 f で $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|^2dt < +\infty$ を満たすものの全体を X と表し $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|^2dt}$ とかく.

(1) $f, g \in X$ に対して次の不等式が成立することを示せ.

$$\left|\int_0^\infty f(t)g(t)dt\right| \le \|f\|\|g\|.$$

(2) $n \in \mathbb{N}$, $f \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nt}f(t)dt = 0$$

が成立することを示せ.

<u>以下の (3),(4) のどちらかを選び解答せよ.</u>

(3) a を正の数とし, n は a より大きい自然数とする. 連続関数 f_n を

$$f_n(t) = \begin{cases} a & 0 \le t < \frac{1}{a} - \frac{1}{n} \\ \text{直線} & \frac{1}{a} - \frac{1}{n} \le t < \frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} \le t \end{cases}$$

とおくとき

$$e^{-2/a} \le \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-2t}f_n(t)dt \le 1$$

であることを示せ.

(4) X 上の線形作用素 T を

$$(Tf)(t) = e^{-t}f(t), \qquad f \in X,\ t \in [0,\infty)$$

と定義するとき

$$\sup\{\|Tf\| \mid f \in X,\ \|f\| \le 1\} = 1$$

であることを示せ. <u>(3) の結果を証明せずに用いても良い.</u>

$\boxed{\textbf{B8}}$

(1) 極座標変換により $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}dxdy$ の値を求め，標準正規分布 N(0,1) の確率密度関数 $\phi(x)$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx=1$ を満たすことを示せ。

(2) 標準正規分布 N(0,1) にしたがう確率変数 Z に対する積率母関数 $m_Z(t)=E[e^{tZ}]$ を求めよ。

(3) 平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ にしたがう確率変数 X に対する積率母関数 $m_X(t)$ を求めよ。

(4) 平均 0, 分散 σ^2 の正規分布から取られた大きさ n の無作為標本 $(X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n)$ の標本平均を $\overline{X}$ とするとき，$Y=\sqrt{n}\,\overline{X}$ の積率母関数を計算することにより，$\sqrt{n}\,\overline{X}$ の確率分布を求めよ。

$\boxed{\textbf{B9}}$

あるサイコロの，1 または 6 の目が出る確率 p に関して，帰無仮説 $H_0 : p=\frac{1}{3}$ を，対立仮説 $H_1 : p>\frac{1}{3}$ に対して検定したい。そのサイコロを 6 回投げたときに 1 または 6 の目が出た回数 X を検定統計量とし，検定の棄却域を $X\geq 4$ とする。

(1) この検定の第 1 種の誤りの確率 α を求めよ。

(2) $p=\frac{2}{3}$ のときの第 2 種の誤りの確率 β の正確な値を求めよ。

(3) $p=\frac{2}{3}$ のときの第 2 種の誤りの確率 β の値を，正規近似によって求めたい。標準正規分布 N(0,1) にしたがう確率変数を Z とするとき，$\beta=P[Z\geq c]$ を満たす c の値を求めよ。

(4) この検定の検出力関数 $L(p)$ を求め，そのグラフの概形を描け。

B10 充足可能なブール式からなる言語を SAT，恒真なブール式からなる言語を TAUT とする．また，言語 A, B に対して，A が B に多項式時間多対一 (many-one) 帰着するとき，$A \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} B$ と表記する．

(1) 言語 A, B, C に対して，$A \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} B$ かつ $B \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} C$ ならば $A \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} C$ であることを示せ.

(2) 言語 A, B に対して，$A \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} B$ ならば $A^c \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} B^c$ であることを示せ．ここで，言語 X に対して，X^c は X の補言語を表すとする．

(3) $\mathrm{SAT}^c \leqq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \mathrm{TAUT}$ であることを示せ.

(4) SAT は多項式時間多対一帰着に関して NP 完全になることが知られている．このことを利用して，TAUT が多項式時間多対一帰着に関して co-NP 完全になることを示せ.

B11 $\{0^p \mid p$ は素数$\}$ は正則言語ではないことを証明せよ。

B12 下の Scheme によるプログラムを考える。

(1) `(ebool '(not (or a (not b))) '(b))` の結果を記せ。

(2) `(bool->if '(not (or a (not b))))` の結果を記せ。

(3) `(ebool '`e` '(`$v_1 \ldots v_n$`))` の結果と `(eif (bool->if '`e`) '(`$v_1 \ldots v_n$`))` の結果が一致するような関数 `eif` を作成せよ。ただし、$n \geq 0$ で、e 中にシンボル `if` は出現しないとする。

```
(define (neg? e)  (and (list? e) (= (length e) 2) (eq? (car e) 'not)))
(define (disj? e) (and (list? e) (= (length e) 3) (eq? (car e) 'or)))
(define (cond? e) (and (list? e) (= (length e) 4) (eq? (car e) 'if)))

(define (ebool e r)
  (cond ((boolean? e) e)
        ((neg? e) (not (ebool (cadr e) r)))
        ((disj? e) (or (ebool (cadr e) r) (ebool (caddr e) r)))
        ((member e r) #t)
        (else #f)))

(define (bool->if e)
  (cond ((neg? e) (list 'if (bool->if (cadr e)) #f #t))
        ((disj? e) (list 'if (bool->if (cadr e)) #t (bool->if (caddr e))))
        (else e)))
```