平成１８年度
自然科学研究科 博士前期課程
学力検査問題
（数学・情報数理学専攻）

数学

平成１７年８月１７日（水）

１２時３０分～１６時３０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある。

   A0 は 全員が 解答すること。
   A 問題 A1, . . ., A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）
   B 問題 B1, . . ., B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので、そのすべてに 科目名、受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙の正方形空欄に、解答しようとする 問題番号を明記 し、
   １枚に１題だけ を解答すること。
   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ 実数 x, y を独立変数とする実数値関数 $f(x,y)$ について、次の３つの命題 P, Q, R を考える。

P : 任意の実数 x に対し、ある実数 y が存在して $f(x,y) \geq 0$ をみたす。
Q : ある実数 y が存在し、任意の実数 x に対して $f(x,y) \geq 0$ をみたす。
R : 任意の実数 y に対し、ある実数 x が存在して $f(x,y) \geq 0$ をみたす。

(1) $f(x,y) := x^2 - 2y - 1$ のとき、命題 P, Q, R のなかで成立するものを全て挙げなさい。

(2) $f(x,y) := 2x - y^2 + 1$ のとき、命題 P, Q, R のなかで成立するものを全て挙げなさい。

(3) 命題 P の否定を書きなさい。ただし “$f(x,y) \geq 0$ でない”は “$f(x,y) < 0$” と表し、否定語や否定記号（$\neg$）を用いてはならない。

$\boxed{\textbf{A1}}$ $m \times n$ 複素行列 A に対して、$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定まる線形写像 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を行列 A の定める線形写像とよび、f_A で表す。

(1) $m \times n$ 複素行列全体のなす集合を $\mathcal{M}$、$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への線形写像全体のなす集合を $\mathcal{L}$ とする。写像 $\varphi\colon \mathcal{M} \ni A \mapsto f_A \in \mathcal{L}$ は、全単射であることを示せ。

(2) A_{11}, A_{22} を正方行列とし、$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ とする。このとき、A の固有多項式は A_{11} の固有多項式と A_{22} の固有多項式の積に等しいことを示せ。

(3) A を m 次複素正方行列, B を n 次複素正方行列とし、行列 X は $AX = XB$ をみたすものとする。また、行列 X の定める線形写像 f_X を g とおく。

(i) g の像空間 $\operatorname{Im} g$ は f_A 不変であり、g の核空間 $\operatorname{Ker} g$ は f_B 不変であることを示せ。

(ii) A と B が共通の固有値をもたないならば、$X = O$ であることを示せ。

ここで、線形写像 f に対して、部分空間 W が f 不変であるとは、$f(W) \subseteq W$ となることをいう。

A2　以下の問いに答えよ。

(1) $0 < x \leq 1$ とする。$0 < r_1 \leq r_2$ に対して

$$\int_{r_1}^{r_2} x^r dr$$

を求めよ。

(2) $0 < p \leq q$ とするとき

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{\log x} dx$$

を求めよ。ただし、以下の事実 (i), (ii) を用いても良い。

(i) $[0,1] \times [p,q]$ で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y & (0 < x \leq 1, y \in [p,q]) \\ 0 & (x = 0, y \in [p,q]) \end{cases}$$

は連続関数である。

(ii) 定理 A: $f(x,y)$ が $[a,b] \times [c,d]$ で連続なら

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

が成り立つ。

(3) 微積分学の基本定理を用いて上記 (2) (ii) の定理 A を証明せよ。ただし、証明中どこで微積分学の基本定理を用いているかを明示せよ。

(ヒント:

$$\varphi(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt, \quad \Phi(y) = \int_a^b \varphi(x,y)dx$$

とおくと

$$\frac{d\Phi}{dy} = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)dx$$

となることを用いても良い。)

$\boxed{\textbf{A3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と、この $\mathbb{R}^2$ に属さない点 p_∞ の和集合を X とおく：

$$X = \mathbb{R}^2 \cup \{p_\infty\}$$

X の位相（開集合系）$\mathcal{O}_X$ を次のように定める：

$$\mathcal{O}_X := \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \text{ または } U = V \cup (X - B(R))\ (V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2},\ R > 0) \right\}$$

ただし $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合系を表し、$B(R)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の原点を中心とする半径 R の閉円板 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ を表すものとする。

この位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトハウスドルフ空間になることを示しなさい。$\mathcal{O}_X$ が X の開集合系となっていることは検証しなくてよい。

(2) 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から原点 O を除いた空間と $\mathbb{R}^2$ に属さない点 p_∞ の和集合を Y とおく：

$$Y = (\mathbb{R}^2 - \{O\}) \cup \{p_\infty\}$$

Y の開集合系 $\mathcal{O}_Y$ であって、$\mathcal{O}_Y$ は $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ の開集合を全て含み、しかも位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がコンパクトハウスドルフ空間となるようなものをひとつ定めなさい。与えた $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がコンパクトハウスドルフ空間になることの証明は述べなくてよい。

$\boxed{\textbf{A4}}$ 確率変数 X, Y に対する結合（同時）分布関数を $F_{X,Y}$ とし、それぞれの周辺分布関数を F_X, F_Y と表す。またその密度関数を f_X, f_Y とおく。このとき次の問に答えよ。

(1) すべての x, y について、

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定数 α $(-1 < \alpha < 1)$ を用いて

$$g(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\left\{1 + \alpha(2F_X(x) - 1)(2F_Y(y) - 1)\right\}$$

とおけば、g は結合（同時）密度関数であり、それぞれの周辺密度関数は f_X および f_Y で与えられることを示せ。

$\boxed{\textbf{A5}}$ 次の Pascal の関数が、引数が非負の整数値で与えられたときの結果を記せ。また、そうなる理由を示せ。

```
function f (x : integer) : integer;
begin
    if x > 256  then f := x − 16 else  f := f ( f (x + 17) )
end;
```

$\boxed{\textbf{B1}}$ 以下 p を素数、$\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる体とする。また、体 $\mathbb{F}_p$ 上の 2 次一般線型群 $\mathrm{GL}(2,p)$ を次で定義する。これは、行列の積で、群になる (このことは示さなくてよい)。

$$\mathrm{GL}(2,p) := \left\{ x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{F}_p,\ \ \det(x) \neq 0 \right\}.$$

また、$|X|$ で有限群 X の位数を表すものとする。

(1) $|\mathrm{GL}(2,p)| = (p^2-1)(p^2-p)$ 　を証明せよ。

(2) 写像 $f : \mathrm{GL}(2,p) \to \mathbb{F}_p{}^{\times} := \mathbb{F}_p - \{0\}$ を $f(x) := \det(x),\ \ \forall x \in \mathrm{GL}(2,p)$ で定義する。このとき、f は群準同型写像かつ全射であることを証明せよ。また、$G := \mathrm{Ker} f$ とおく。このとき、 $|G|$ を求めよ。ここで、$\mathrm{Ker} f$ は f の核 (kernel)、つまり $\mathrm{Ker} f := \{x \in \mathrm{GL}(2,p) \mid f(x) = 1\}$ である。以下 G をこの意味で用いる。

(3) $P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; b \in \mathbb{F}_p \right\}$ とおくとき、P は G のシロー (Sylow) p-部分群であることを証明せよ。以下 P をこの意味で用いる。

(4) $N_G(P)$ を G における P の正規化群とする。つまり、$N_G(P) := \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$ と定義する。このとき、$|N_G(P)|$ を求めよ。

(5) G のシロー (Sylow) p-部分群の個数を求めよ。

$\boxed{\textbf{B2}}$ R は可換環とする。R のイデアル I および R の素イデアル P, Q に対して

$$I^2 \subseteq P \cup Q \implies I \subseteq P \text{ または } I \subseteq Q$$

となることを示せ。ただし、I^2 は $\{ab \mid a, b \in I\}$ で生成される R のイデアルを表す。

$\boxed{\textbf{B3}}$ ユークリッド平面内の２つの曲線、円周：

$$S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

と、レムニスケート：

$$L = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \,|\, r^2 = \cos 2\theta,\ r \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

とは同相であるか。同相であるならば、それらの間の同相写像を構成し、そうでなければ、その理由を述べよ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の、滑らかに埋め込まれた、原点 O を通過しない閉曲線 C 上の点 P が極点であるとは、直線 OP と C の点 P における接線とが直交することとして定義する。このとき、C 上には少なくとも２つの極点が存在することを示せ。ここで $\mathbb{R}^n$ 内の、滑らかに埋め込まれた閉曲線とは、$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^n$ への C^∞ 級写像:

$$c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$$

で、２条件

(1) $c'(t) = (c_1'(t), \cdots, c_n'(t)) \neq (0, \cdots, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(2) $c(t) = c(t+1), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

をみたすものとして定める。

$\boxed{\textbf{B5}}$ 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$ を考える。

(1) $f(z)$ の各極におけるローラン展開を求めよ。

(2) C を円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ を反時計回りにまわる積分路とするとき、$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を計算せよ。

(3) C は (2) と同じとするとき、関数

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C e^{zw} f(w) dw$$

は次の微分方程式の解であることを示せ： $u'(z) - u(z) = z$.

$\boxed{\textbf{B6}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ とし、 $x = x(t)$ を未知関数とする連立斉次線形微分方程式

$$x' = Ax$$

の基本行列を 1 つ求めよ。ただし、関数を成分とするベクトルや行列の微分は、成分毎に行うものとする。また、基本行列とは t の関数を成分とする正方行列 $X = X(t)$ で、

$$X' = AX \quad \text{かつ} \quad \det X \not\equiv 0$$

をみたすもののことをいう。なお、次の事実を用いてもよい。

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) $y(t)$ は 2 階の微分方程式

$$y'' + 2ty' + 2y = 1$$

の解で、初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ をみたすものとする。

(i) $z(t) = \left(y(t)e^{t^2}\right)'$ とおくとき、 $z(t)$ を求めよ。

(ii) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ $\mathbb{R}$ 上の p 乗ルベーグ可積分関数全体を $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$ とし、$\mathbb{R}$ 上本質的に有界な関数全体を $L^\infty(\mathbb{R})$ とする。ここで、ルベーグ可測関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上本質的に有界であるとは、ある M が存在して、 $|f(x)| \leq M$ が $\mathbb{R}$ 上ほとんど至るところ成立することをいう。

$f(x) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ のとき、以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $q \geq p$ に対して $f(x) \in L^q(\mathbb{R})$ であることを示せ。

(2) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |f(x)| \geq 1\right\}$ とおくとき、$m(E) < +\infty$ であることを示せ。ただし、 m は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする。

(3) $\displaystyle\lim_{q\to\infty} ||f||_q = ||f||_\infty$ であることを示せ。ただし、

$$
\begin{aligned}
&||f||_q = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q dx\right)^{1/q}, \\
&||f||_\infty = \inf\left\{M \;\middle|\; \mathbb{R}\text{ のほとんど至るところで } |f(x)| \leq M\right\},
\end{aligned}
$$

とする。

B8 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x-y}, & x,y \geq 0 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$$G(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x}-xe^{-y}, & 0 \leq x \leq y \text{ のとき}, \\ 1-e^{-y}-ye^{-y}, & 0 \leq y < x \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

について次の問いに答えよ。

(1) F が分布関数でないことを示せ。

(2) G が分布関数であることを示せ。

以下、G を分布関数にもつ2次元確率変数を (X,Y) とおくことにする。

(3) 確率変数 X と Y 各々の分布関数を求めよ。

(4) 共分散 $Cov[X,Y]$ を求めよ。

B9 標準正規分布に従う確率変数 X,Y,Z,U,V について

$$Y = aX + bU$$
$$X = cZ + dV$$

が成り立ち、また $E(XU) = E(ZV) = E(ZU) = 0$ とする。ただし、a,b,c,d は正の定数とする。次の問いに答えよ。

(1) (X,Y,Z) の分散共分散行列を求めよ。

(2) (X,Y,Z) の定める分布からの無作為標本 $(x_1,y_1,z_1),\cdots,(x_n,y_n,z_n)$ が得られたとき、a,b,c,d のモーメント推定量を求めよ。

(3) (U,X) の同時分布も正規分布であるとき、U と X が独立であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ αを有限体$GF(2^4)$の原始元とし、αの$GF(2)$上の最小多項式$M_1(x)$をx^4+x+1とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) $GF(2^4)$の各元のべき表現とベクトル表現の対応表を作れ。

(2) α^3の$GF(2)$上の最小多項式$M_3(x)$を求めよ。その際、α^3の共役根をすべて求め、それらを根とする$GF(2^4)$の上の多項式を展開する形で算出せよ。

(3) $x^{16}-x$を$GF(2^4)$の上で因数分解せよ。また$GF(2)$の上で因数分解せよ。

(4) $GF(2)$の上の多項式$c(x) = c_1x^{14} + c_2x^{13} + \cdots + c_{14}x + c_{15}$は、上記$M_1(x)$で割り切れるように定められているものとする。しかしながら、15個の係数ビットの中で、1ビットが反転し、c_1からc_{15}の係数ビット列が、

0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1

に変わってしまった。変わってしまったビットを訂正し、もとのビット列を求めよ。

B11 下の Scheme によるプログラムについて、次の問に答えよ。

(1) 次の式を評価した結果を記せ。

(a) `(set-of exp1)`

(b) `(map pair exp1)`

(c) `(equals exp2)`

(d) `(das exp3)`

(2) 手続き `das` における引数と値の関係を簡潔に述べよ。

——————————— Scheme プログラム ———————————

```
(define (das x) (set-of (da x)))

(define (da x)
  (cond ((equals x) '())
        ((eq-list #t (map pair x))
           (let ((y (map car x)))
             (if (equals y) (da (map cdr x)) (da y))))
        (else x)))

(define (eq-list x r)
  (if (null? r) #t (if (equal? x (car r)) (eq-list x (cdr r)) #f)))

(define (equals x)
  (if (null? x) #f (eq-list (car x) (cdr x))))

(define (var x)
  (and (list? x) (eqv? (length x) 2) (eq? (car x) 'var) (symbol? (cadr x))))

(define (pair x) (if (var x) #f (pair? x)))

(define (set-of x)
  (if (null? x) x
    (if (member (car x) (cdr x)) (set-of (cdr x))
      (cons (car x) (set-of (cdr x))))))
;-------------------------------------------------------------
(define exp1 '(a b (var x) (a . b) a (var x) x))
(define exp2 '(#t (= 0 0) (eq? 'a 'a)))
(define exp3
  '((p (var x) (f (f (g (var y)) b) (var y)) (g (var y)))
    (p (var x) (f (var z) b) (g b))
    (p (var x) (f (var x) (var y)) (var w))))
```

$\boxed{\textbf{B12}}$ 閉ラムダ項 Y を Y$x =_\beta x(\mathsf{Y}x)$ をみたすものとする。自然数 n $(n \geq 0)$ を表す閉ラムダ項を $\overline{n}$ とする。閉ラムダ項 ζ を、$\zeta\overline{0} =_\beta \lambda xy.x$ かつ $\zeta\overline{n} =_\beta \lambda xy.y$ $(n \geq 1)$ をみたすものとする。また、 閉ラムダ項 σ, π をそれぞれ $\sigma\overline{n} =_\beta \overline{n+1}$, $\pi\overline{n} =_\beta \overline{n-1}$ $(n \geq 1)$ をみたすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 閉ラムダ項 Y の一例を具体的に求め、 それが Y$x =_\beta x(\mathsf{Y}x)$ を満たしていることを示せ。(ヒント: $V \equiv \lambda y.x(yy)$ とし、 V を使って Y を表す。)

(2) x, y, z を異なる変数とする。ラムダ項 M に自由に現れる変数は x, y, z のみとする。このとき $Nyz =_\beta (\lambda x.M)N$ をみたす閉ラムダ項 N が存在する。このようなラムダ項 N を Y と M を用いて表し、 $Nyz =_\beta (\lambda x.M)N$ をみたすことを示せ。

(3) $\alpha yz =_\beta \zeta zy(\sigma(\alpha y(\pi z)))$ みたす閉ラムダ項 α は $\alpha\overline{m}\,\overline{n} =_\beta \overline{m+n}$ をみたすことを示せ。

(4) $\alpha\overline{m}\,\overline{n} =_\beta \overline{m+n}$ をみたす閉ラムダ項 α を Y$, \zeta, \sigma, \pi$ を用いて表せ。(**注意:** $\overline{n}$ はチャーチ数とは限らないので、$\alpha \equiv \lambda xyzu.xz(yzu)$ ではない。)