平成１９年度

自然科学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学専攻）

数 学

平成１８年８月１７日（木）

１３時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題 A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認めらない。）

   B 問題 B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので、そのすべてに 科目名，専攻名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙の正方形空欄に、解答しようとする 問題番号を明記 し、

   １枚に１題だけ を解答すること。

   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$

(1) 集合 X, Y, Z と, X から Y への写像 f, および Y から Z への写像 g があるとき, 以下の問いに答えよ。

(1-a) f, g がともに全単射ならば, 合成写像 $g \circ f$ も全単射であることを示せ。

(1-b) 合成写像 $g \circ f$ が全単射であるが, f, g のいずれも全単射ではないような例を作れ。

(2) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ への全単射が存在するか。理由とともに答えよ。

(3) 条件

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から, 集合 X への全単射は存在しない。

を満たすような集合 X の例を挙げよ。答えだけでよい。

$\boxed{\textbf{A1}}$ 次の各問に答えよ。

[1] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

に対し， $P^{-1}AP = D$ となる直交行列 P と対角行列 D を求めよ。

[2] 2 次の実正方行列全体の集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和と実数倍により実ベクトル空間となる。$M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; x + w = 0 \right\}$$

で定める。

(1) V は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

(2) V の基底を一組求めよ。（基底であることの証明は不要。）

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし、$X \in V$ に対して $f(X) = AX - XA$ とおくと、f は V の線形変換となる（証明不要）。(1) で求めた V の基底に関して f を行列表示せよ。

(4) f の固有値をすべて求めよ。また、各固有値に対して、固有ベクトルとなる V の元を求めよ。

A2

n は 2 以上の自然数とする。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot n} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot n} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となることを示せ。

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}}$$

A3

つぎの問いに答えよ。

(1) 次のうち, $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるものはどれか。また, コンパクト集合であるものはどれか。説明は不要である。ただし, $\mathbb{R}^2$ の位相は通常の距離空間としての位相とする。

(a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \geqq 1\right\}$

(b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy \leqq 1\right\}$

(c) x 軸。 つまり, $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0\right\}$

(d) 原点のみの集合。 つまり, $\{(0, 0)\}$

(2) F が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であれば, ある連続関数 $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = 0\right\}$$

と表せることを証明せよ。

(3) いま $\mathbb{R}$ に以下のような通常の位相とは別の位相を定める。すなわち, $\mathbb{R}$ の閉集合系 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ は ϕ, $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{R}$ の有限部分集合全体から成る集合族であるものとして $\mathbb{R}$ に位相を定める。この位相のもとで, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ は稠密であること, つまり, $\mathbb{R}$ における $\mathbb{Z}$ の閉包は $\mathbb{R}$ に一致することを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{A4}}$ 確率変数 X, Y の同時密度関数を次で与える。

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(1) 確率変数 X の周辺密度関数 $f_X(x)$ を求めよ。また確率変数 X の平均と分散を求めよ。

(2) 任意の $0 < x < 1$ に対して，$X = x$ が与えられたときの Y の条件つき密度関数 $f_{Y|X}(y|x)$ を求めよ。また条件付き平均 $E[Y|X = x]$ と条件付き分散 $V[Y|X = x]$ を求めよ。

(3) 確率変数 X と Y の相関係数 ρ を求めよ。

A5 関数 f を次のような Pascal によるプログラム (の断片) によって定める。

```
const N = n;
type index = 1..N;
var a : array [index] of 0..N;

function f(t : index) : integer;
var h : index;  exit : boolean;
begin
    h := t;
    exit := false;
    while not exit do
        if a[h] = 0 then exit := true
        else begin
            h := a[h];
            if a[h] = 0 then exit := true
            else begin
                h := a[h];
                t := a[t];
                if h = t then exit := true
            end
        end;
    f := a[h]
end;
```

なお、n は正の整数とし、$i = 1, \ldots, n$ について、f を呼び出す前の a[i] の値を a_i とする。

(1) $n = 9$ で、$a_i\,(i = 1, \ldots, n)$ が次のように定められているとき、f(8), f(7) の値をそれぞれ記せ。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i	3	1	4	1	5	9	2	6	0

(2) $0 \leq a_i \leq n\,(i = 1, \ldots, n)$ とする。$1 \leq t \leq n$ のとき、f(t) の実行が終了することを示せ。

B1 群 G の正規部分群 H, K について, 以下の問いに答えよ。

(1) HK および $H \cap K$ が G の正規部分群であることを示せ。

次に HK の元 $hk (h \in H, k \in K)$ に対し,

$$\phi(hk) = (h(H \cap K), k(H \cap K))$$

で定義される HK から直積 $H/(H \cap K) \times K/(H \cap K)$ への写像を考える。

(2) ϕ は well-defined であることを示せ。すなわち $hk = h'k' (h, h' \in H, k, k' \in K)$ ならば, $\phi(hk) = \phi(h'k')$ であることを示せ。

(3) ϕ は準同型写像であることを示せ。

(4) 同型 $HK/(H \cap K) \cong H/(H \cap K) \times K/(H \cap K)$ を示せ。

B2 つぎの各問に答えよ。

[1] 4 個の元からなる可換体は存在するか。また, 8 個の元からなる可換体は存在するか。存在するときは具体的に構成し，そうでないときは存在しないことを証明せよ。

[2] R, S は可換環で, $f\colon R \to S$ は環の準同型写像で $f(1) = 1$ を満たすとする。

(1) J が S のイデアルであるとき, $f^{-1}(J)$ は R のイデアルであることを示せ。

(2) もし, J が S の素イデアルならば, $f^{-1}(J)$ は R の素イデアルであることを示せ。

(3) もし, J が S の極大イデアルで, f が全射ならば, $f^{-1}(J)$ は R の極大イデアルであることを示せ。

$\boxed{\textbf{B3}}$ 複体 $K = \{p, q, r, s, \langle pq\rangle, \langle qr\rangle, \langle rp\rangle, \langle ps\rangle, \langle qs\rangle, \langle rs\rangle, \langle pqr\rangle\}$ について次に答えよ。ただし，p, q, r, s は頂点（0-単体），$\langle v_0, \cdots v_n\rangle$ は $v_0, \cdots, v_n$ を頂点とする n-単体を表す。

(1) 多面体 $|K|$ を図示せよ。

(2) ０次元ホモロジー群 $H_1(K)$，１次元ホモロジー群 $H_1(K)$，２次元ホモロジー群 $H_2(K)$ を求めよ。（計算過程も詳しく書くこと）

$\boxed{\textbf{B4}}$ つぎの問いに答えよ。

(1) 円周（１次元球面）$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ が C^∞ 級微分可能多様体であることを C^∞ 級座標近傍系を具体的に与えることによって示せ。

(2) 関数 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x^2$ で定めるとき，f が C^∞ 級関数であることを (1) で与えた座標近傍系を用いて示せ。

(3) (2) の関数 f の臨界点（微分が消える点）をすべて求めよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$ f を実数 $\mathbb{R}$ 上の実数値可積分関数とする。

(1) φ が $\mathbb{R}$ 上の実数値有界連続関数であるとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)dy$$

は連続であることを示せ。

(2) φ が微分可能で， φ' が $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数であるとき， $F(x)$ は微分可能で

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi'(x-y)dy$$

であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B6}}$

(1) λ を複素数とし，$\varepsilon > 0$ とする。複素平面上の点 $z = \varepsilon$ の近傍で関数

$$f(z) = z^{\lambda}$$

を考える。ただし，ここで $\log\varepsilon \in \mathbb{R}$ なる枝を取るものとする。この関数 $f(z)$ が $z = \varepsilon$ から出発して，小円周 $|z| = \varepsilon$ に沿って反時計まわりに一周する道に沿って解析接続して再び $z = \varepsilon$ に来たとき，どのような関数に変化するか。

(2) $-1 < \alpha < 1$ とするとき，次の積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^2}\,dx$$

B7 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -x(\sqrt{x^2+y^2}-1)-y, \quad \frac{dy}{dt} = -y(\sqrt{x^2+y^2}-1)+x$$

について次の問に答えよ。

(1) 極座標変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

を行うことにより，上の微分方程式を r, t および θ, t に関する微分方程式に書き換えよ。

(2) (1) の結果を利用して，与えられた微分方程式の原点以外を出発する解はどのような集合に近づくかを考察せよ。

B8 標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の密度は，パラメータ $0 < \theta < 1$ として

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \ x = 0, 1.$$

また事前分布 $p(\theta)$ は単位区間上の一様分布で与えられている。いま $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の条件付き密度を $g(x_1, x_2, \cdots, x_n \,|\, \theta) = \Pi_{i=1}^n f(x_i \,|\, \theta)$ で表し，2 乗損失 $l(\hat{\theta}; \theta) = (\hat{\theta}-\theta)^2$ を考える。

(1) θ の事後密度

$$h(\theta|x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{g(x_1, x_2, \cdots, x_n \,|\, \theta)\, p(\theta)}{\displaystyle\int_0^1 g(x_1, x_2, \cdots, x_n \,|\, \theta)\, p(\theta)\, d\theta}$$

を求めよ。

(2) 事後期待リスク $v(\hat{\theta} \,|\, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \displaystyle\int_0^1 (\hat{\theta}-\theta)^2\, h(\theta \mid x_1, x_2, \cdots, x_n)\, d\theta$ を求めよ。

(3) 事後期待リスクを最小とするような $\hat{\theta}$, つまり θ のベイズ推定値を計算せよ。

$\boxed{\textbf{B9}}$ 確率変数 X はパラメータ λ のポアソン分布に従うものとする。すなわち，X の離散密度関数 $f_X(x)$ は次式で与えられる。

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ \ x = 0, 1, 2, \cdots$$

(1) X の積率母関数 $M_X(t) = E[e^{tX}]$ を求めよ。

(2) X の平均と分散がともに λ になることを示せ。

(3) X を基準化した確率変数 $Z = \dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ のモーメント母関数 $M_Z(t)$ を求めよ。

(4) $\lambda \to \infty$ のとき、$M_Z(t)$ は 基準正規分布 $N(0,1)$ の積率母関数 $e^{t^2/2}$ に収束することを示せ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $\mathcal{C}$ を言語のクラスとする．このとき，co-(co-$\mathcal{C}$) $= \mathcal{C}$ であることを示せ.

(2) $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を言語のクラスとする．$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ が成り立つならば，co-$\mathcal{C}_1 \subset$ co-$\mathcal{C}_2$ が成り立つことを示せ.

(3) A を co-NP-完全な言語とする．A を計算する多項式時間アルゴリズムが存在するなら P $=$ NP となることを示せ.

B11 Σ をアルファベットとしたとき，以下の問いに答えよ。

(1) Σ 上の正則言語 L と語 $w \in \Sigma^*$ に対し，言語 $\{v \mid wv \in L\}$ が正則であることを示せ。

(2) Σ 上の正則言語 L_1, L_2 に対し，言語 $\{v \mid wv \in L_2$ を満たす $w \in L_1$ が存在する $\}$ が正則であることを示せ。

B12 次の Scheme のプログラムについて，以下の問に答えよ。

```
(define n2 (lambda (f) (lambda (x) (f (f x)))))

(define (c n)
  (if (= n 0) (lambda (f) (lambda (x) x))
      (lambda (f) (lambda (x) (f (((c (1- n)) f) x))))))

(define (foo y z)
  (lambda (f) (lambda (x) ((y f) ((z f) x)))))

(define Z
  (lambda (f) ((lambda (u) (f (lambda (y z) ((u u) y z))))
               (lambda (u) (f (lambda (y z) ((u u) y z)))))))

(define a
  (lambda (f) (lambda (y z)
                (if (zero? y) z (1+ (f (1- y) z))))))
```

(1) `((n2 (lambda (x) (+ x 1))) 0)` の値を計算せよ。

(2) n, m を 0 以上の整数としたとき，
`(((foo (c `n`) (c `m`)) (lambda (x) (+ x 1))) 0)`
の値を n と m を使って表せ。(理由も述べること。)

(3) n, m を 0 以上の整数としたとき，`((Z a) `n m`)` の値を n と m を使って表せ。(理由も述べること。)