平成２０年度

大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（数学・情報数理学コース）

数 学

平成１９年８月２０日（月）

１３時００分～１７時００分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので、そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙の正方形空欄に、解答しようとする 問題番号を明記 し、
   １枚に１題だけ を解答すること。
   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A0 集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ を考える。

(1) X の 2 つの部分集合 A, B に対して, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ となることを証明せよ。

(2) 次の 2 つの条件 (a), (b) が同値であることを証明せよ。

(a) 写像 f は単射である。

(b) 集合 X のどんな 2 つの部分集合 A, B に対しても, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成立する。

$\boxed{\textbf{A1}}$ 自然数 n に対して, n 次複素正方行列全体を $M = M_n(\mathbb{C})$ とする。また, $A \in M$ に対して, A の対角成分全体の和を $\mathrm{tr}(A)$ と書くことにする。つまり, $A = (a_{ij})$ とするとき, $\mathrm{tr}(A) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定めるのである。ここで, $\mathbb{C}$ は複素数体である。このとき, 次の各問に答えよ。

(1) $f : M \to \mathbb{C}$ を, 各 $A \in M$ に対して $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ で定義する。 f が $\mathbb{C}$ 上線形写像であることを証明せよ。

(2) $\mathrm{tr}(E_{ij}A)$ を求めよ。ここで, E_{ij} は (i, j) 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 となっている M の元である。

(3) (1) で定めた f を考える。$A \in M$ が条件

$$\forall B \in M \text{ に対して } BA \in \mathrm{Ker}(f)$$

を満たしているとする。このとき, $A = 0$ (n 次零行列) となることを証明せよ。

(4) 次の (a), (b) を証明せよ。

(a) $A, B \in M$ に対して, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ である。

(b) $A \in M$ と正則行列 $P \in M$ に対して, $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ である。

(5) $A \in M$ に対して, $\mathrm{tr}(A)$ は, A の n 個の固有値すべての和と等しいことを証明せよ。

$\boxed{\textbf{A2}}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{3x+1}{x^3 - x^2 + x - 1}dx - \log \frac{1 - 2x + x^2}{1 + x^2} \quad (x < 1)$ とおくとき次の問に答えよ.

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の原点における Taylor 展開およびその収束半径を求めよ.

(3) (2) で求めた整級数は $x = 1$ では収束するか.

$\boxed{\textbf{A3}}$ n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における 2 点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, \cdots, y_n)$ の距離 $d_2(x, y)$ と $d_\infty(x, y)$ を、それぞれ

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

および

$$d_\infty(x, y) = \mathrm{Max}\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$$

と定める。このとき、距離空間 $X_2 = (\mathbb{R}^n, d_2)$ と $X_\infty = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ は恒等写像により同相となることを示せ。

$\boxed{\textbf{A4}}$ 2 つの確率変数 X, Y は独立で, ともに区間 $(0, 1)$ 上の一様分布 (uniform distribution) に従うとする.

(1) 和 $U = X + Y$ の密度関数を求めよ.

(2) 積 $V = XY$ の密度関数を求めよ.

(3) 商 $W = X/Y$ の密度関数を求めよ.

$\boxed{\textbf{A5}}$ Pascal のプログラムで、定義、宣言が

```
const n = n;
type nArray = array [1 .. n] of integer;

procedure p(var a : nArray);
var i, j : integer;
begin
    a[1] := 1;
    i := 1;
    while sqr(i) <= n do begin
        if a[i] = 1 then begin
            j := sqr(i);
            while j <= n do begin
                a[j] := i;
                j := j + i
            end
        end;
        i := i + 1
    end
end;
```

のようにされているものとする。このとき変数 a を nArray 型の配列として、手続き p を p(a) で呼び出して帰ってきたときの a について、次の問に理由とともに答えよ。但し、n は 2 以上の整数定数とする。

(1) 集合 $\{i | 2 \leq i \leq n \wedge \mathrm{a}[i] = 1\}$ は、どんな集合か。

(2) 配列 a において $1 \leq i \leq n$ なる i について、$\mathrm{a}[i] \neq 1$ である要素 $\mathrm{a}[i]$ の値はどのようなものか記せ。

$\boxed{\textbf{B1}}$ G は n 次対称群 S_n（すなわち，集合 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ の上のすべての置換のなす乗法群）の真部分群（すなわち，$\{1\} \subsetneqq G \subsetneqq S_n$）とする。また，$a \in G$ による $i \in \Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ の像は i^a で表し，G における積は

$$i^{ab} = (i^a)^b \quad (a, b \in G)$$

と定める。なお，群 G の単位元（Ω の恒等写像）も 1 で表すことにする。

(1) $i, j \in \Omega$ に対して，$i \sim j$ を $i^a = j$ なる $a \in G$ が存在することと定める。このとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ。

以下, (1) における同値関係で $i \in \Omega$ を含む同値類を $i^G = \{i^a \mid a \in G\}$ と書く。また，$G_i = \{a \in G \mid i^a = i\}$ とする。

(2) G_i は G の部分群となることを示せ。

(3) $i \in \Omega$ に対して，同値類 i^G に含まれる元の個数 $|i^G|$ は $|G : G_i|$（G における G_i の指数）に等しいことを示せ。

(4) $a \in G$ と $i, j \in \Omega$ に対して，$i^a = j$ とするとき，

$$a^{-1} G_i a = G_j \quad \text{かつ} \quad G_i a = \{b \in G \mid i^b = j\}$$

であることを示せ。

(5) $i^G = \Omega$ で，かつ G がアーベル群ならば，$G_i = \{1\}$ であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B2}}$ $R = k[X, Y, Z]$ は体 k 上の多項式環とし，$I = (X^2Y, X^3Z)R$ とする。R の素イデアルで I を含むもの全体を $\mathrm{V}(I)$ とする。さらに $\mathrm{V}(I)$ において包含関係で極小な素イデアルの集合を $\mathrm{Min}(I)$ と表す。

(1) $\mathrm{Min}(I)$ の元を全て求めよ。

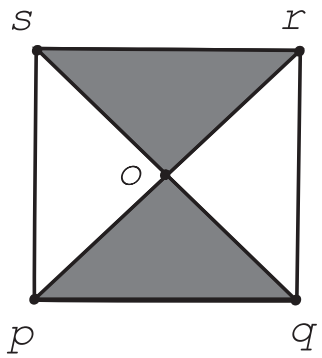
(2) R の任意の素イデアル P に対して $S = \{\, a \in R \mid a \notin P \,\}$ は積閉集合であることを示せ。

(3) $P \in \mathrm{Min}(I)$ で $X \notin P$ ならば剰余環 R_P / IR_P は体であることを示せ。ただし，R_P は R を P で局所化した環（R の $S = \{\, a \in R \mid a \notin P \,\}$ による商環 $S^{-1}R$）を表す。

$\boxed{\textbf{B3}}$　X を、下図のように

　5 個の頂点（0 次元単体）　：$<o>, <p>, <q>, <r>, <s>$,
　8 本の辺（1 次元単体）　　：$<op>, <oq>, <or>, <os>, <pq>, <qr>, <rs>, <sp>$,
　2 個の三角形（2 次元単体）：$<opq>, <ors>$

からなる図形とする。X の実数係数ホモロジー群 $H_q(X, \mathbb{R}),\ q = 0, 1, 2, \ldots$ を求めよ。



$\boxed{\textbf{B4}}$　実数成分 2 次正方行列全体のなす空間を $M(2, \mathbb{R})$ とおく。写像 $f : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xw - yz \\ x + w \end{pmatrix}$$

で定める。$M(2, \mathbb{R})$ を 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ と同一視するとき $f^{-1}(\mathbf{e}_1)$ は $M(2, \mathbb{R})$ のなめらかな 2 次元部分多様体であることを証明せよ。ここに $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする。

$\boxed{\textbf{B5}}$ $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測集合族を $\mathfrak{M}$、ルベーグ測度を m とし、$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の非負ルベーグ可測関数とする.

$\varphi(E) = \displaystyle\int_E f(x)dm(x) \quad (E \in \mathfrak{M})$ とおくとき、以下の問いに答えよ.

(1) φ は $\mathfrak{M}$ 上の測度であることを示せ.

(2) $\varphi(E) < +\infty$ のとき、

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0;\ A \subset E,\ m(A) < \delta \quad \text{ならば} \quad \varphi(A) < \varepsilon$$

であることを示せ.

$\boxed{\textbf{B6}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $f(z)$ が $\mathbb{C} - \{0\}$ で正則なら $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ も $\mathbb{C} - \{0\}$ で正則であることを証明せよ.

(2) 複素係数 2 次多項式 $f(z)$ に対し 2 つの零点が上半平面内にあれば $f'(z)$ の零点も上半平面内内にあることを証明せよ.

(3) 複素係数 n 次多項式 $f(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ の零点がすべて上半平面内にあれば、$f'(z)$ の零点もすべて上半平面内内にあることを証明せよ.

B7 y_0, y_1 を変数 x の関数、

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha x} + \mathrm{e}^{\beta x} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

とするとき 次の各問に答えよ. ただし $\dfrac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_0}{dx} \\ \frac{dy_1}{dx} \end{pmatrix}$ である.

(1) ベクトル表示された微分方程式 $\dfrac{dY}{dx} = AY$ の各成分の表す方程式を書け.

(2) 微分方程式 $\dfrac{dY}{dx} = AY$ を解け.

(3) 微分方程式 $\dfrac{dY}{dx} = AY + b(x)$ を解け.

(4) (3) において特に $\alpha + \beta = 0,\ \alpha\beta > 0$ である時, 実関数を用いて解を表せ.

$\boxed{\textbf{B8}}$ 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とおき, $\mathbb{N}$ 上で定義された実数値関数 u で $\sup_{x\in\mathbb{N}} |u(x)| \leq 1$ をみたすもの全体の集合を Γ とおく. X と Y を $\mathbb{N}$-値確率変数とし, それぞれの離散型確率密度関数を $f_X(x)$, $f_Y(x), x \in \mathbb{N}$ とおく.

(1) 任意の $u \in \Gamma$ に対して

$$\big|E[u(X)] - E[u(Y)]\big| \leq \sum_{x=1}^{\infty} \big|f_X(x) - f_Y(x)\big|$$

が成り立つことを示せ.

(2) Γ の要素 u で

$$\big|E[u(X)] - E[u(Y)]\big| = \sum_{x=1}^{\infty} \big|f_X(x) - f_Y(x)\big|$$

をみたすものを求めよ.

(3) $d(X,Y) = \sup_{u\in\Gamma} \big|E[u(X)] - E[u(Y)]\big|$ と定義する. このとき

$$d(X,Y) = 2 \sup_{A\subset\mathbb{N}} \big|P[X \in A] - P[Y \in A]\big|$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\textbf{B9}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立にパラメータ θ の指数分布 (exponential distribution) に従う確率変数とする．すなわち，X_i の確率密度関数が次のように与えられているとする．

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} \qquad\qquad (x > 0)$$

ただし，$\theta > 0$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 確率変数 $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の積率母関数 $M_S(t) = E(e^{St})$ を求めよ．

(2) S の平均 $E(S)$ と分散 $\mathrm{var}(S)$ を求めよ．

(3) 標本平均 $\overline{X} = S/n$ がパラメータ $\lambda = 1/\theta$ の不偏推定量 (unbiased estimator) であることを示せ．また，$\overline{X}$ の分散も求めよ．

(4) パラメータ θ のフィッシャー情報量 (Fisher information) $I(\theta)$ が

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\log f(X_i|\theta)\right]\right\} = \frac{n}{\theta^2}$$

となることを示せ．

(5) λ に対するクラメル・ラオの下限 (Cramér-Rao lower bound) $V = (\frac{\partial\lambda}{\partial\theta})^2/(nI(\theta))$ を求めることにより，$\overline{X}$ が λ の一様最小分散不偏推定量 (UMVUE) であることを示せ．

$\boxed{\textbf{B10}}$ $n,\, k\,(\leq n)$ を自然数とし、有限体 F_2 上の n 次元行ベクトル空間 V とその k 次元の線形部分空間 C について考える． V の任意の元 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n),\ v_i \in F_2 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し、その重み $w(\boldsymbol{v})$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ に含まれる非零要素 (つまり 1) の個数とする．また、V の任意の 2 つの元 $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}$ 間の距離 $d(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u})$ を、 $d(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}) = w(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ と定義する．このとき、以下の問に答えよ．

1. (A) 線形部分空間 C における最小距離 $d_{min}(C)$ を, 次のように定義する．

$$d_{min}(C) = \min\{\, d(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u} \in C,\, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u}\}$$

このとき、次式が成立することを示せ．

$$d_{min}(C) = \min\{w(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in C,\, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}\}$$

   (B) $d_{min}(C) \geq 2t+1 \quad (t$ はある自然数) ならば、2 項係数に関する次式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \leq 2^{n-k}$$

2. k 次元の線形部分空間 C を、F_2 上の $(n-k) \times n$ 行列 $\boldsymbol{H}$ を用いて、次のように定める．

$$C = \{\, \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{v} \in V\}\text{（}\boldsymbol{v}^T \text{ は } \boldsymbol{v} \text{ の転置を表す）}$$

このとき、次の問に答えよ．

   (A) 行列 $\boldsymbol{H}$ の n 個の各列 $(\neq \boldsymbol{0})$ がすべて相異なれば、$d_{min}(C) \geq 3$ であることを示せ．

   (B) $d_{min}(C) \geq 4$ となる行列 $\boldsymbol{H}$ を構成したい．但し、$(n-k)$ の値は 3 以上の定数として与えられ、n, k の値は自由にとれるものとする。このとき、$n,\, k$ の値がなるべく大きくなるように、1.(A) の結果を前提に探索的に構成していく手順を記せ．

B11 下の Scheme によるプログラムについて、次の問に答えよ。

1. 式 `(define a (fc))` を評価した結果を記せ。
2. 上の後、式 `(a)` を引き続いて 3 回評価したときの結果を記せ。
3. 式 `(f 3)` を評価した結果を記せ。
4. 手続き `f` における引数と値の関係を簡潔に延べよ。

Scheme プログラム

```
(define (fc) (let ((c 0)) (lambda () (set! c (+ c 1)) c)))

(define (f n)
  (letrec ((x 0) (a (fc)) (b (fc)) (c (fc))
           (g (lambda (n) (cond
                 ((= n 0) (a) 1)
                 ((= n 1) (b) 1)
                 (else (c) (+ (g (- n 1)) (g (- n 2))))))))
     (set! x (g n))
     (list x (- (a) 1) (- (b) 1) (- (c) 1))))
```

B12 **組み合せ論理 (combinatory logic)** の体系 CLw を次のように定義する。CLw の基本記号 (primitive symbol) は可算個の変数 'x', 'y', 'z',... と'K', 'S' という定数記号と 2 つの括弧 '(', ')' である。CLw の基本記号から作られる表現の中に項と呼ばれるものがあり, (1) 変数と定数記号は項である, (2) M と N が項ならば (MN) は項である, と帰納的に定義される。項の足りない括弧は左から補うことにする。すなわち, $\mathsf{S}xy\mathsf{S}$ は項 $(((\mathsf{S}x)y)\mathsf{S})$ を表している。M と N を項とするとき, $M \rhd_1 N$ および $M \rhd N$ という 2 種類の表現を CLw の**式**という。証明図の出発点となる公理は式であり, 証明図は式を木状に並べたものである。証明図はその根元にある式に至る証明図と呼ばれる。体系 CLw の公理型は次の 3 つである。

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{K}) & \mathsf{K}MN \rhd_1 M \\ (\mathsf{S}) & \mathsf{S}MNR \rhd_1 MR(NR) \\ (\rho) & M \rhd M \end{array}$$

体系 CLw の推論規則は次の 3 つである。

$$\frac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\,(\mu), \qquad \frac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\,(\nu),$$

$$\frac{M \rhd_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\,(\tau).$$

式 $M \rhd_1 N$ に至る体系 CLw の証明図があるとき, $M \rhd_{1w} N$ と書く。また, 式 $M \rhd N$ に至る体系 CLw の証明図があるとき, $M \rhd_w N$ と書く。$M \rhd_{1w} N$ となるような項 N が存在しないとき, 項 M は**正規形 (normal form)** である, という。$M \rhd_w N$ かつ項 N が 正規形のとき, N は M の正規形であるという。項 $\mathsf{S(KS)K}$ を B と表記する。更に, 項 $\mathsf{S(BBS)(KK)}$ を C と表記する。このとき次の問いに答えよ。

1. 項 $\mathsf{B}xyz$ の正規形を求めよ。($\mathsf{B}xyz \rhd$ 正規形 に至る証明図は書かないでよいが, 結果だけでなく途中経過も書くこと。)

2. 項 $\mathsf{C}xyz$ の正規形を求めよ。($\mathsf{C}xyz \rhd$ 正規形 に至る証明図は書かないでよいが, 結果だけでなく途中経過も書くこと。)

3. $M \rhd_w N$ かつ $N \rhd_w R$ ならば $M \rhd_w R$ であることを証明せよ。(ヒント: $M \rhd N$ に至る証明図の長さに関する帰納法で証明する。)