平成２２年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２１年８月１７日（月）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. **問題は A0 問題が１題、A 問題が５題、B 問題が１２題ある。**

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. **解答用紙は 5 枚あるので、そのすべてに 科目名、コース名と受験番号 を記入のこと。**

3. **各解答用紙には、解答しようとする 問題番号を明記 し、**

   １枚に１題だけ を解答すること。

   解答不能の場合も、解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. **問題冊子は持ち帰ってもよい。**

$\boxed{\textbf{A0}}$ A, B, C は集合, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : B \to A$ は写像とする．この問いでは, 恒等写像を $\mathrm{id}_A : A \to A$ と表す．

(1) 以下の命題 (i), (ii), (iii) のうち, 真であるものは証明し, 偽であるものは反例を示せ．

(i) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である．

(ii) $g \circ f$ が単射ならば, g は単射である．

(iii) $h \circ f = \mathrm{id}_A$ ならば, f は全単射である．

(2) $Y \subset B$ であるとき, $f^{-1}(B-Y) = A - f^{-1}(Y)$ であることを証明せよ．ただし, $B-Y$ は B から Y を引いた差集合である．

$\boxed{\textbf{A1}}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対し, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$ と定める．ここで, $\overline{y}$ は y の共役複素数を表す．また, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定める．この問いでは, $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位とする．

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ に対し, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ かつ $|\boldsymbol{x}| = 1$ となるベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$ をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$ を 1 つ選んで固定する．このとき, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ かつ $|\boldsymbol{y}| = 1$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^2$ が存在することを証明せよ．

(3) 複素ベクトル空間の線形写像 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ は, $|\boldsymbol{x}| = 1$ を満たす任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$ に対し, $|f(\boldsymbol{x})| = 2$ を満たすと仮定する．このとき, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ ならば $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = 0$ であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{A2}}$ p は実数の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $p > 1$ とする．このとき広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^p} dt$$

が収束することを示せ．

(2) $p > 1$ とする．このとき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

が収束することを示せ．

(3) $p \leqq 1$ とする．このとき級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

は収束しないことを示せ．

(4) 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

が収束するための実数 p の必要十分条件を求めよ．

$\boxed{\text{A3}}$ 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ にふたつの位相 (開集合族) $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を考える．$\mathcal{O}_1$ は普通の位相, すなわちユークリッド距離から定まる位相とし, $\mathcal{O}_2$ は, 空集合と, $\mathbb{R}$ 自身と, $\mathbb{R}$ から有限個の点を取り除いた集合すべてからなる集合族とする．

このとき, 以下の各問いに理由を付けて答えよ．

(1) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ において $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ は閉集合か．

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_2)$ において $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ は閉集合か．

(3) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_1)$ において $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ はコンパクトか．

(4) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_2)$ において $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ はコンパクトか．

(5) $f(x) = x^2$ および $g(x) = \sin x$ を $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_2)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_2)$ 自身への写像と見たとき, f, g はそれぞれ連続か．

$\boxed{\text{A4}}$ つぼには最初, r 個の赤ボールと w 個の白ボールが入っている．ただし r, w は 3 以上の整数とする．このつぼからボールを非復元抽出で 3 回取り出し, i 回目 $(i = 1, 2, 3)$ の取り出しで, 赤ボールであれば $X_i = 1$, 白ボールであれば $X_i = 0$ とおく．ここで非復元抽出とは, 無作為に取り出したボールをもとに戻さない抽出法である．

つぎの問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X_2 = 1)$ を求めよ．

(2) 条件付き確率 $P(X_3 = 1 | X_2 = 1)$ を求めよ．

(3) 平均 $E(X_1 + X_2 + X_3)$ を求めよ．

(4) 分散 $Var(X_1 + X_2 + X_3)$ を求めよ．

A5 次のページの Pascal によるプログラムについて, データ

```
8
3 1 4 1 5 9 2 6
```

が与えられたとして, 次の問いに答えよ.

(1) 43 行目の `out` の直前において, 変数 `p` が指し示す木の状態を図示せよ.

(2) このプログラムの実行結果を記せ.

(3) 手続き `out` は何をするものか簡潔に記せ.

(4) 手続き `ins` は何をするものか簡潔に記せ.

(5) このプログラムと同じデータに対して同じ出力が得られるという条件の下で, 手続き `ins` を再帰を用いずに書き直せ.

```
program a5(input, output);
type
  tree = ^cell;
  cell = record
           info : integer;
           left, right : tree
         end;

procedure ins(x : integer;  var p : tree);
  procedure newcell;
  begin new(p);
        with p^ do begin
          info := x;
          left := nil;
          right := nil
        end
  end;
begin
  if p = nil then newcell
  else if x < p^.info then ins(x, p^.left)
  else ins(x, p^.right)
end;

procedure out(p : tree);
begin
  if p <> nil then begin
    out(p^.left);
    write(p^.info);
    out(p^.right)
  end
end;

procedure proc;
var p : tree;
    n, i, x : integer;
begin
  p := nil;
  read(n);
  for i := 1 to n do begin
    read(x);
    ins(x, p)
  end;
  out(p)
end;

begin proc end.
```

$\boxed{\text{B1}}$ 群 G の部分集合 S に対して,

$$N_G(S) := \{x \in G \mid x^{-1}Sx = S\}$$
$$C_G(S) := \{x \in G \mid ax = xa \ (\forall a \in S)\}$$

とする．

(1) $N_G(S)$ は G の部分群, $C_G(S)$ は $N_G(S)$ の正規部分群であることを示せ．

(2) H を G の部分群とする．$a \in N_G(H)$ に対して, 写像 $\theta_a : H \to H$ を $\theta_a(x) := a^{-1}xa$ で定める．

(i) θ_a は全単射な準同型であることを示せ．

(ii) $N_G(H)/C_G(H)$ は $\mathrm{Aut}\,H$ の部分群に同型となることを示せ．ここで $\mathrm{Aut}\,H$ は H の自己同型群 (すなわち H から H 自身への全単射な準同型全体のなす群) である．

(3) $G = GL(2, \mathbb{Z}_3)$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ とするとき, $N_G(S)$, $C_G(S)$ の位数を求めよ．ただし, $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．

$\boxed{\text{B2}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ は整域であるが, $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ は整域でないことを証明せよ．ここで，$\mathbb{R}[X,Y]$, $\mathbb{C}[X,Y]$ は多項式環である．

(2) $R = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2)$ における, $X, Y \in \mathbb{R}[X,Y]$ のイデアル (X^2+Y^2) を法とする同値類をそれぞれ x, y とする．

まず, (x) は R の素イデアルではないことを示せ．

次に, (x) を含む R の極大イデアルをすべて求めよ．

また, R は UFD (素元分解整域) ではないことを示せ．

$\boxed{\text{B3}}$ 3次元球面を

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 = r_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, z_2 = r_2 e^{\sqrt{-1}\theta_2}, r_1^2 + r_2^2 = 1, r_i \geqq 0, \theta_i \in \mathbb{R}\}$$

と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $X = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ は $D^2 \times S^1$ と同相であることを示せ．ただし,

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

である．

(2) $S^3 - X$ の閉包のオイラー標数を求めよ．

$\boxed{\text{B4}}$ $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする．$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 上の同値関係 $\sim$ を「$(x, y) \sim (x', y')$ であるとは，0 でない実数 c が存在して $x' = cx$ かつ $y' = cy$ となることである」と定義し, P^1 をこの同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ の商空間 $\big(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\big)/\sim$ であると定める．

(1) S^1 が 1 次元 C^∞ 多様体となることを示せ．

(2) P^1 が 1 次元 C^∞ 多様体となることを示せ．

写像 $h : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を $h(x, y) = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$ で定める．

(3) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ に対して, $h(x, y) \in S^1$ であることを示せ．

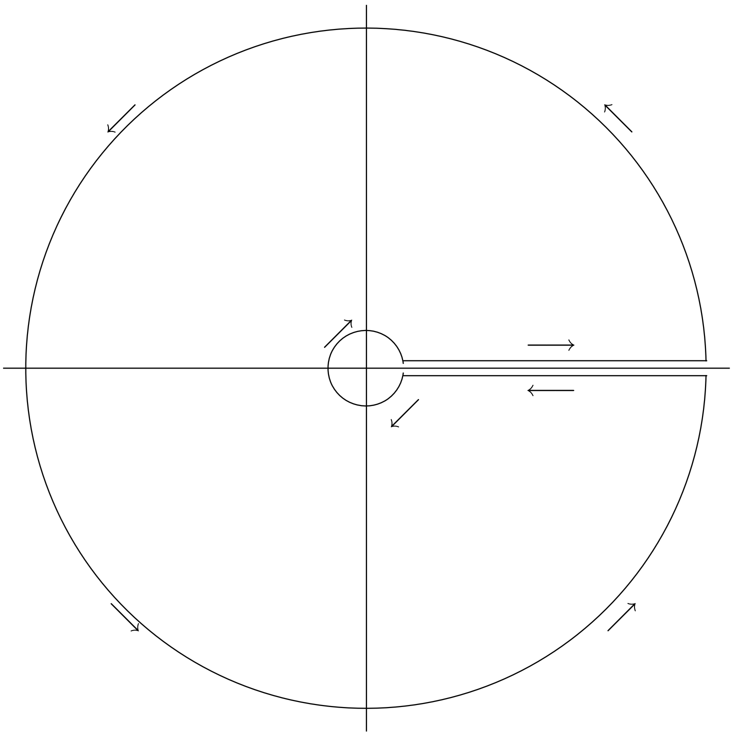
(4) $(x, y) \sim (x', y')$ ならば $h(x, y) = h(x', y')$ であることを示せ．

(5) h から誘導される写像を $\overline{h} : P^1 \to S^1$ とする．$\overline{h}$ は全単射であることを示せ．

$\boxed{\textbf{B5}}$ $0 < a < 1$ **とするとき**, **次の積分の値を求めよ．**

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

ヒント: **以下の積分路を用いた複素積分を考えても良い．**



$\boxed{\text{B6}}$ f は $\mathbb{R}$ 上でルベーグ積分可能な実数値関数とし, g は $\mathbb{R}$ 上で連続かつ有界な実数値関数とする．正の整数 n に対して, 関数 f_n を

$$f_n(x) = nf(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

で定義する．このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g d\mu = g(0) \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{B7}}$ $y(x)$, $z(x)$ は x を独立変数とする関数とする．

(1) 微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z + 1 \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$$

の解で $y(0) = 1$, $z(0) = 2$ を満たすものを求めよ．

$\boxed{\text{B8}}$ X と Y をそれぞれ母数 (n,p) の二項分布 $Bi(n,p)$ に従う独立な確率変数とする．ただし, n は正の整数であり, p は $0<p<1$ をみたす実数である．次の問いに答えよ．

(1) X の積率母関数を求めよ．

(2) $Z=X+Y$ の確率分布を求めよ．

(3) N を $2n$ 以下の正の整数とする．$Z=N$ であるという条件の下での X の条件付き確率分布を求めよ．

$\boxed{\text{B9}}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を一様分布 $U(0,\theta)$ $(\theta>0)$ からの無作為標本とする．未知母数 θ に対する以下の推定量を考える．

$$\widehat{\theta}_1=\widehat{\theta}_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\frac{2(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n},$$
$$\widehat{\theta}_2=\widehat{\theta}_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\frac{n+1}{n}\max_{1\le j\le n}X_j,$$
$$\widehat{\theta}_3=\widehat{\theta}_3(X_1,X_2,\ldots,X_n)=(n+1)\min_{1\le j\le n}X_j.$$

次の問いに答えよ．

(1) $\widehat{\theta}_i$, $i=1,2,3$ が不偏推定量であることを示せ．

(2) $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$ が平均 2 乗一致推定量であること, すなわち $\lim_{n\to\infty} Var(\widehat{\theta}_i)=0$, $i=1,2$ となることを示せ．

(3) $\widehat{\theta}_3$ が一致推定量でないことを示せ. ただし, $\widehat{\theta}$ が θ の一致推定量であるとは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1$ となることを言う．

$\boxed{\text{B10}}$ **有限体** $\mathbb{F}$ **の元を成分に持つ** n **次元行ベクトル空間** V **とその** k **次元線形部分空間** C **を考える** (**ただし**, $0 < k < n$ **とする**)**.** $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in V$ **の重み** $w(\boldsymbol{v})$ **を**

$$w(\boldsymbol{v}) := |\{i \mid v_i \neq 0\}|$$

により定め, V **の** 2 **つの元** $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ **の距離** $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ **を** $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) := w(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ **と定義する．ここで**, **有限集合** X **について**, $|X|$ **はその元の個数を表す．このとき**, **以下の問いに答えよ．**

(1) **線形部分空間** C **における最小距離** $d_{\min}(C)$ **を**, **次のように定義する．**

$$d_{\min}(C) = \min\{\, d(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{u} \in C,\, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{u}\}$$

このとき, **次式が成立することを示せ．**

(A) $d_{\min}(C) = \min\{w(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in C,\, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}\}$

(B) $d_{\min}(C) \leq n - k + 1$

(2) $\mathbb{F}$ **上の** (n, k) **線形符号** C **を**, $(n - k) \times n$ **行列** $\boldsymbol{H}$ **を用いて**, **次のように定める．**

$$C = \{\, \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{H}\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{0},\, \boldsymbol{v} \in V\} \quad \text{（}\boldsymbol{v}^T \text{ は } v \text{ の転置を表す）．}$$

ただし, **行列** H **は**, $\mathbb{F}$ **の位数** n **の元** α **をとり**, $m = n - k$ **とし**,

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \cdots & \alpha & 1 \\ \alpha^{2(n-1)} & \alpha^{2(n-2)} & \cdots & \alpha^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^{(m-1)(n-1)} & \alpha^{(m-1)(n-2)} & \cdots & \alpha^{m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるものとする．次の問いに答えよ．

(A) **行列** H **の任意の** m **個の列からなる行列の行列式が** 0 **でないことを示せ．**

(B) $d_{\min}(C) = n - k + 1$ **となることを示せ．なお**, (1) **の結果および** (2) **の** (A) **の結果は利用してよい．**

B11 次のページの Scheme によるプログラムについて, 次の問いに答えよ．

(1) 式 `env` を評価した結果を記せ．

(2) 次のように定義してあるとき, 式 `(flt e)` を評価した結果を記せ．

```
(define e '(f a (g x (h b y))))
```

(3) (2) で定義された `e` に対して, `(pst e)` 及び `(flt (pst e))` を評価したときの結果を記せ．

(4) 式

```
(ev (flt (pst '(+ (* a x) (* b y)))))
```

を評価した結果を記せ．

(5) `funlist` および `env` で与えられた対応を用いる．(4) と同じ式

```
(ev (flt (pst '(+ (* a x) (* b y)))))
```

を評価したときに, 算術の計算結果の数値が得られるようにしたい．`ap` と `val` のみを書き換えて, この変更を実現せよ．

```
(define (flt x)
  (letrec ((f
     (lambda (x a)
       (if (pair? x) (f (car x) (f (cdr x) a))
                     (if (null? x) a (cons x a))) ) ))
     (f x '()) ))

(define (pst x)
  (letrec ((f
    (lambda (x a)
      (if (null? x) a
          (cons (pst (car x)) (f (cdr x) a)))) ))
    (if (list? x) (f (cdr x) (list (car x))) x) ))

(define (ev x)
  (letrec (
    (s '())
    (push (lambda (x) (set! s (cons x s)) s))
    (pop (lambda () (let ((v (car s))) (set! s (cdr s)) v)))
    (args (lambda (n p a)
             (if (= n 0) (begin (set! s p) a)
               (args (- n 1) (cdr p) (cons (car p) a)) )))
    (f (lambda (x)
      (if (null? x) (if (pair? s) (car s) s)
        (let ((fun (assoc (car x) funlist)))
           (push (if fun (ap (car x) (args (cadr fun) s '()))
                         (val (car x) env)))
           (f (cdr x))))))
    ) (f x) ))

(define ap (lambda (f x) (cons f x)))
(define val (lambda (x a) x))

(define (pairlis x y)
  (letrec ((f (lambda (x y a)
     (if (null? x) a
        (cons (cons (car x) (car y)) (f (cdr x) (cdr y) a))))))
    (f x y '())))

(define funlist
  (pairlis '(+ - * / car cdr cons)
      (pairlis '(2 2 2 2 1 1 2)
               (list + - * / car cdr cons))))

(define env (pairlis '(x y a b) '(1 2 4 8)))
```

$\boxed{\text{B12}}$ **ラムダ項** M **に対して**, M **に現れる変数の集合**, **自由に現れる変数の集合をそれぞれ** $V(M)$, $FV(M)$ **とかく．例えば**, $V(xv(\lambda yz.yv)) = \{x, y, z, v\}$, $FV(xv(\lambda yz.yv)) = \{x, v\}$ **である．** M **と** N **が** (**文字列として**) **まったく同じラムダ項のとき**, $M \equiv N$ **とかく．また**, M **から束縛変数を置き換えて** (**これを** α-**変換という**) **得られるラムダ項を** N **とするとき**, $M \equiv_\alpha N$ **とかき** M **と** N **は** α-**同値であるという．例えば**, $xv(\lambda yz.yv)y \equiv_\alpha xv(\lambda zu.zv)y$ **である．ラムダ項** M **の中の変数** x **の自由な出現にラムダ項** N **を代入した結果を** $[N/x]M$ **とかく．正確には**, **以下のように帰納的に定義される．**

定義 (代入) 適用可能な定義が 2 **つ以上あるときは小さい番号の定義を適用する．**

(i) $[N/x]x \equiv N$,

(ii) $[N/x]a \equiv a \quad$ (a **は変数または定数で** $a \not\equiv x$ **のとき**),

(iii) $[N/x](QR) \equiv ([N/x]Q\ [N/x]R)$,

(iv) $[N/x](\lambda x.Q) \equiv \lambda x.Q$,

(v) $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda y.[N/x]Q \quad$ ($y \notin FV(N)$ **のとき**),

(vi) $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]Q \quad$ (**ここで** z **は** $V(\lambda xy.NQ)$ **の中にはない最初の変数である．変数は** $u_0, u_1, u_2, \ldots$ **の順に並べられている**)．

このとき次の問いに答えよ．

(1) **ラムダ項** $[(\lambda u_1.u_1u_2)/u_1]((\lambda u_1.u_0u_1)u_1(\lambda u_2.u_2u_1))$ **を求めよ．**

(2) **変数** x **は** $x \notin V(\lambda yz.MN)$ **を満たし**, y, z **は任意の変数** ($y \equiv z$ **である可能性もある**) **とする．一般には**, $[x/y][M/z]N \equiv_\alpha [[x/y]M/z][x/y]N$ **は成立しない．反例** M, N, x, y, z **を求めよ．**

(3) **変数** x **と** u **については** $x \notin V(\lambda yz.MN)$ **と** $u \notin V(\lambda xyz.MN)$ **を満たし**, y, z **は任意の変数** ($y \equiv z$ **である可能性もある**) **とする．このとき**,

$$[x/y][M/z]N \equiv_\alpha [[x/y]M/u][x/y][u/z]N$$

であることをラムダ項 N **の長さについての帰納法で証明せよ．下に述べる代入と** α-**変換の性質を使ってよい．**

代入と α-**変換の性質** (4 **は** $x \equiv y$ **でも成立**):

1. $[y/x]M$ **の長さは** M **の長さと同じである**,
2. $MN \equiv_\alpha QR \iff M \equiv_\alpha Q$ **かつ** $N \equiv_\alpha R$,
3. $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda x.N \iff M \equiv_\alpha N$,
4. $z \notin V(\lambda xy.MN) \implies [N/x](\lambda y.M) \equiv_\alpha \lambda z.[N/x][z/y]M$.