平成２３年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２２年８月１７日（火）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

   １枚に１題だけ を解答すること。

   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

A0

(1) f を集合 X から集合 Y への写像とする。X の部分集合 A の f による像を $f(A)$ と書き，Y の部分集合 B の f による逆像を $f^{-1}(B)$ と書く。次にあげる命題が正しければ証明を与え，誤っていれば反例を与えよ。

(a) X の任意の部分集合 A に対して $Y - f(A) = f(X - A)$ が成り立つ。

(b) Y の任意の部分集合 B_1, B_2 に対して $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つ。

(2) 集合 X から集合 Y への写像 f が全射である (すなわち $f(X) = Y$) ことと，以下の条件

> 任意の集合 Z に対して，Y から Z への写像 g, h が $g \circ f = h \circ f$ を満たせば，$g = h$

が同値であることを示せ。

$\boxed{\textbf{A1}}$ α を実数として，実数体上の 4 次元ベクトル空間 V の基底 e_1, e_2, e_3, e_4 を取り，

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 2e_1 & + & e_2 & - & e_3 & & \\ w_2 & = & e_1 & + & 2e_2 & & & - & e_4 \\ w_3 & = & -e_1 & + & e_2 & + & 2e_3 & + & \alpha e_4 \\ w_4 & = & e_1 & - & e_2 & + & \alpha e_3 & + & 2e_4 \end{array}$$

とおく。w_1, w_2, w_3, w_4 が生成する部分空間を W とおく。

(1) ベクトル $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ が和空間 W に属するための必要十分条件を求めよ。

(2) W の次元が 3 となる必要十分条件を求めよ。

(3) α は問 (1),(2) の両方の条件をみたすものとする。線形変換 $f : V \to V$ を次によって定義する。

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f(e_1) & = & & & & & e_3 & - & e_4 \\ f(e_2) & = & & & e_2 & & & + & e_4 \\ f(e_3) & = & e_1 & & & & & - & e_4 \\ f(e_4) & = & -e_1 & - & e_2 & - & e_3 & + & e_4 \end{array}$$

このとき $f(W) \subset W$ を示せ。さらに，f を W から W への線形変換と考えて，その固有値を求めよ。

$\boxed{\textbf{A2}}$ $0 < x < 1$ において関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ とおく。

(1) $u = \sqrt{t}$ とおくことにより $f(x)$ を計算せよ。

(2) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ に対し，$\dfrac{d^n}{dx^n} g(0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ を計算せよ。

(3) $f(x^2)$ を，奇関数になるように $-1 < x < 1$ に延長して得られる関数を $F(x)$ とする。このとき $F(x)$ の原点における Taylor 展開およびその収束半径を求めよ。

$\boxed{\textbf{A3}}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B, C, D, E を次のように定義する。下の問（１）（２）（３）にそれぞれ理由をつけて答えよ。

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

$$C = B \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + y^2 \leqq 1 \right\}$$

$$D = A \cup \left\{ \left((1-t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right), (1-t)\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < t \leqq 1 \right\}$$

$$E = A \cup \left\{ \left((1+t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right), (1+t)\sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < t \right\}$$

(1) A, B, C, D, E のなかの開集合と閉集合を，それぞれすべて挙げよ。

(2) A, B, C, D, E のなかのコンパクト集合をすべて挙げよ。

(3) A, B, C, D, E のなかで連結な位相空間となるものをすべて挙げよ。

$\boxed{\textbf{A4}}$ X_1, X_2 は独立で各々平均 1 の指数分布に従う確率変数とする。次の問に答えよ。

(1) $X = X_1 + X_2$ の確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ。また X の期待値を求めよ。

(2) $Y = \max(X_1, X_2)$ の確率密度関数 $f_Y(x)$ を求めよ。また Y の期待値を求めよ。

$\boxed{\textbf{A5}}$ 次の Pascal の関数 f について問に答えよ。

```
function f(n, m : integer) : integer;
begin
    if m = 0 then f := 1
    else if m mod 2 = 0 then f := f(n * n, m div 2)
    else f := n * f(n * n, m div 2)
end;
```

(1) f(3, 5) の値を書け。理由は述べなくてよい。

(2) 整数値 n, 非負整数値 m に対し，f(n, m) を評価した際の乗算の総計算回数を c_m とする。非負整数値 m を引数にとったとき，c_m を値として返す Pascal の関数 c1 を，再帰呼び出しを用いて作成せよ。

(3) (2) と同様に c_m を計算する Pascal の関数 c2 を，再帰呼び出し，配列，レコード，集合，ポインタ，および関数 c1 のいずれも用いずに作成せよ。

$\boxed{\textbf{B1}}$ 群 G の部分群 H, K に対し，集合 HK を

$$HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$$

と定める。

(1) HK が G の部分群であるための必要十分条件は，等式 $HK = KH$ が成り立つことであることを証明せよ。

(2) 次の条件 (A), (B) は同値であることを証明せよ。

(A)(A1) 任意の $x \in H, y \in K$ に対し $xy = yx$ が成り立つ。
(A2) 任意の $g \in G$ に対し $g = xy$ をみたす $x \in H, y \in K$ が，それぞれただひとつ存在する。

(B)(B1) H, K は G の正規部分群である。
(B2) $G = HK$ が成り立つ。
(B3) $H \cap K$ は G の単位元のみからなる。

(3) 問 (2) の条件が成立しているとき，同型対応を与えることにより，

$$G \cong H \times K$$

を証明せよ。ただし $H \times K$ は H と K の直積集合に，演算を

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy') \quad (x, x' \in H, y, y' \in K)$$

で定めた群である。

$\boxed{\textbf{B2}}$ 素数 p に対して，有理数全体 $\mathbb{Q}$ の部分集合 $R,\ M$ を

$$R = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ p \nmid m \right\}, \quad M = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ p \nmid m,\ p | n \right\}$$

で定義する。このとき以下の問に答えよ。

(1) R は $\mathbb{Q}$ の部分環になっていることを証明せよ。

(2) M は R の極大イデアルであることを証明せよ。

(3) R と M の差集合 $R - M$ が，R の可逆元 (単元) 全体と一致していることを証明せよ。

(4) R の極大イデアルは M だけであることを証明せよ。

B3 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の1辺の長さ1の正三角形全体のなす集合を M とおく。すなわち M の各元は $\mathbb{R}^2$ 内の1辺の長さ1の正三角形であり，このような2つの正三角形は $\mathbb{R}^2$ の部分集合として一致するときに限り等しいとする。

M に自然な微分可能多様体の構造を定めるような座標近傍系を与えよ。

B4

(1) 4つの0次元単体（頂点）と3つの1次元単体（辺）からなる単体複体をすべて求めよ。ただし，1つの1次元単体の両端点は2つの異なる頂点からなるものとし，2つの頂点を結ぶ1次元単体は高々1つとする。また単体複体が定める多面体の連結性は仮定しない。

(2) (1) で求めた単体複体のうち，その多面体が可縮でないものがあれば，その整係数ホモロジー群を全て求めよ。

B5 単位円板から原点を除いた領域 $D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ において正則な関数 $f(z)$ について以下の問に答えよ。

(1) 次の各条件が互いに同値であることを示せ。

(a) $f(z)$ は D^* において原始関数を持つ

(b) D^* 内の任意の C^1 級閉曲線 c に対して，$\displaystyle\int_c f(z)dz = 0$

(c) $f(z)$ の原点0における留数が0

(2) 任意の自然数 n に対して，D^* で正則な関数 $F(z)$ が存在して，n 階導関数 $F^{(n)}(z)$ が $f(z)$ に一致するとする。このとき，原点0は $f(z)$ の除去可能な特異点であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B6}}$　$\mathbb{R}$ 上のボレル集合族を $\mathfrak{m}$ とおく。固定された実数 a に対して，写像 $\varphi_a : \mathfrak{m} \to \{0,1\}$ を

$$E \in \mathfrak{m} \text{ に対して，} \quad \varphi_a(E) = \begin{cases} 1 & (a \in E \text{ のとき}) \\ 0 & (a \notin E \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義するとき，以下の問に答えよ。

(1) φ_a は $\mathfrak{m}$ 上の測度になることを示せ。

(2) f を $\mathbb{R}$ 上の複素数値連続関数とする。このとき，f は $\mathbb{R}$ 上で測度 φ_a について可積分であることを示せ。更に，f の φ_a による積分が次式

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\varphi_a(x) = f(a)$$

を満たすことを示せ。

$\boxed{\textbf{B7}}$　x, y, z を変数 t の関数として，ベクトル

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

に対し

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$$

とおく。このとき，微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2/t \end{pmatrix} X$$

を解け。

$\boxed{\textbf{B8}}$ $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ は，独立同分布確率変数列であり，その分布が連続分布であるとする。次の確率を求めよ。

(a) $P(X_1 = X_2)$

(b) $P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4)$

(c) $P(X_1 > X_2 < X_3 < X_4)$

$\boxed{\textbf{B9}}$ $X_1, \cdots, X_n$ を未知の平均 μ と既知の分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とし，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ を標本平均とする。次の問に答えよ。

(1) $t \neq 0$ とする。$\widehat{\theta} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n} + t\overline{X}}$ が $\theta = e^{t\mu}$ の不偏推定量であることを示せ。

(2) $\overline{X}$ が μ の十分完備統計量であることを示せ。

(3) $\theta = e^{t\mu}(t \neq 0)$ の一様最小分散不偏推定量（UMVUE）を求めよ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ SAT を充足可能な論理式からなる言語，TAUT を恒真な (常に真となる) 論理式からなる言語とする。さらに $\{(F, F') \mid F \in \mathrm{SAT}$ かつ $F' \in \mathrm{TAUT}\}$ で表される言語を L とする。このとき次の問に答えよ。

(必要であれば，SAT が，多項式時間多対一帰着 ($\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$-帰着) に関して，NP 完全であることを，証明なしで用いてもよい。)

(1) $\mathrm{TAUT} \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} L$ となることを示せ。

(2) TAUT が $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$-帰着に関して co-NP 完全になることを示せ。

(3) もし $L \in \mathsf{NP}$ ならば $\mathsf{NP} = \text{co-}\mathsf{NP}$ となることを示せ。

$\boxed{\textbf{B11}}$ 次の Scheme のプログラムについて問に答えよ。

```
(define (map1 f seq)
  (if (null? seq)
      '()
      (cons (f (car seq)) (map1 f (cdr seq)))))

(define (foldr-c f ini)
  (define (foldr seq)
    (if (null? seq)
        ini
        (f (car seq) (foldr (cdr seq)))))
  foldr)

(define (map-c f)
  (foldr-c [exp1] [exp2]))
```

(1) 関数 `map1` の働きについて簡潔に説明せよ。

(2) `(foldr-c + 0)` を評価して得られる値について簡潔に説明せよ。

(3) 式 `(map1 f seq)` の評価がエラーを起こさずに終了し，整数値のリスト ($m_1 \cdots m_n$) (ただし $n \geq 0$) を値として返すような環境を考える。また，この評価の過程においては `set!` などの副作用を伴う評価は行われないものとする。この環境で，式 `((map-c f) seq)` の評価もエラーを起こさずに終了し，リスト ($m_1 \cdots m_n$) を値として返すものになるように，$\boxed{\text{exp1}}$, $\boxed{\text{exp2}}$ をそれぞれ Scheme の式で埋めよ。

$\boxed{\textbf{B12}}$ 次の図形は自然演繹の体系 NJ の推論図である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\to\beta \quad y:\alpha}{\beta}}{\alpha\to\beta}\ \lambda y}{(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta}\ \lambda x \quad y:\alpha\to\beta}{\alpha\to\beta} \quad x:\alpha}{\beta}}{(\alpha\to\beta)\to\beta}\ \lambda y}{\alpha\to(\alpha\to\beta)\to\beta}\ \lambda x \quad y:\alpha}{(\alpha\to\beta)\to\beta}$$

ゲンツェンのオリジナルな NJ では仮定の目印のための変数 'x', 'y' などの代わりに数字 '1', '2' などを用いている。上では '$\to$' の導入規則ののときに落ちる仮定を特定するために規則の横に 'λx' などと書かれているが，オリジナルでは横に '$\to$–I_1' などと特定するための数字も書かれている。上の例では，下から 2 行目の '$y:\alpha$' という仮定だけが落ちないで残っているので，$\alpha \vdash_{NJ} (\alpha\to\beta)\to\beta$ を示す推論図になっている。

'$\to$' の導入規則の直後に'$\to$' の除去規則があるとき，その導入規則の下にある論理式を極大論理式と呼ぶ。上の推論図には複数の極大論理式が存在するが，例えば下から 2 行目の $\alpha\to(\alpha\to\beta)\to\beta$ が極大論理式である。極大論理式が現れない推論図まで変形できるとき，それを元の推論図の正規形という。このとき次の問に答えよ。

(1) 上の推論図の正規形を求めよ (結果だけでなく途中経過も書くこと)。

(2) $\forall x(\neg pxx \to pxy), \forall x(pxy \to \neg pxx) \vdash_{NJ} pyy$ を示す体系 NJ の推論図をえがけ。ただし，$\neg\alpha$ は $\alpha\to\bot$ ('$\bot$' は偽をあらわす命題定数) の省略形である。

(3) 体系 NJ の部分体系で '$\to$' の導入規則と '$\to$' の除去規則しか持たないものを $\mathrm{NJ}_{\to}$ とする。体系 $\mathrm{NJ}_{\to}$ の弱正規化定理 (うまく変形すれば正規系に変形できる) を証明せよ。