平成２５年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２４年８月２１日（火）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

   １枚に１題だけ を解答すること。

   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ X, Y を空でない集合とし, A, B は X の空でない部分集合, C, D は Y の空でない部分集合とする。以下の命題が正しいかどうか答え, 正しければ証明し, 誤りならば反例を挙げよ。

(1) X から Y への写像 f が, $A \subsetneqq B$ を満たす任意の A, B に対して, $f(A) \subsetneqq f(B)$ を満たすならば, f は単射である。

(2) X から Y への写像 f が, $C \subsetneqq D$ を満たす任意の C, D に対して, $f^{-1}(C) \subsetneqq f^{-1}(D)$ を満たすならば, f は全射である。

(3) $f(A) \subset C$ を満たす X から Y への任意の写像 f が, $f(A) \subset D$ を満たすならば, $C \subset D$ である。

(4) $f(B) \subset C$ を満たす X から Y への任意の写像 f が, $f(A) \subset C$ を満たすならば, $A \subset B$ である。

$\boxed{\textbf{A1}}$　行列 A に対して, ${}^tA$ を A の転置行列とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $B = {}^tA\,A$ の固有値を求めよ。

(2) m, n を自然数とし, A は, 実数を要素とする階数 n の $m \times n$ 行列とする。$B = {}^tA\,A$ とするとき, B の固有値はすべて正の実数であることを示せ。(実対称行列の固有値はすべて実数であることは用いてもよい。)

$\boxed{\textbf{A2}}$　n を自然数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(\log|x|)^n$ を求めよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 (\log x)^n\,dx$ を求めよ。

A3 実数全体 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ に 2 点 p, q を加えた集合を S とおく。だたし, p, q は $\mathbb{R}$ の元ではないとする。正の実数 r と $x \in \{p, q\}$ に対して S の部分集合 $U_r(x), V_r(x), W_r(x)$ を

$$U_r(x) = (r, +\infty) \cup \{x\},\ V_r(x) = (-\infty, -r) \cup \{x\},\ W_r(x) = U_r(x) \cup V_r(x)$$

で定義する。

これらを用いて, 位相空間 X, Y, Z を次のように定める。

X と Y は, ともに集合 S 上の位相空間であり, 部分集合 $\mathbb{R}$ 上には通常の数直線としての位相を入れる。

X では, p の基本近傍系として $\{U_r(p) \mid r > 0\}$, q の基本近傍系として $\{V_r(q) \mid r > 0\}$ を採用する。

Y では, $x \in \{p, q\}$ の基本近傍系として $\{W_r(x) \mid r > 0\}$ を採用する。

Z は S の部分集合 $S - \{q\}$ 上に Y からの相対位相を入れた位相空間とする。

これについて以下の問いに答えよ。

(1) X, Y, Z はコンパクト空間であるか否か? それぞれ理由をつけて答えよ。

(2) X, Y, Z はハウスドルフ空間であるか否か? それぞれ理由をつけて答えよ。

(3) X, Y, Z のうち, 円周 $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1\right\}$ と同相なものがあれば, 具体的に同相写像を与えてこれを示せ。

A4 $t > 0$ に対して, 確率変数 X が値 x を取る確率が

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{t^x}{x!}e^{-t}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられるとき, X はパラメータ t のポアソン分布に従うという。2 つの確率変数 X, Y が独立でそれぞれパラメータ t, s のポアソン分布に従うとき, 以下の問いに答えよ。

(1) X の期待値と分散を求めよ。

(2) X の特性関数を求めよ。

(3) $X + Y$ の特性関数を求めよ。

(4) $X + Y$ が値 z を取る確率 $P(X + Y = z)$ を求めよ。

A5 以下の Pascal プログラムについて (1)〜(3) の問に答えよ。

```
function f(n : integer) : integer;
var m : integer;
begin
  if n < 2 then f := 0
  else
  begin
    m := n div 2;
    if m mod 2 = n mod 2 then f := f(m) else f := f(m) + 1
  end
end;
```

(1) f(5), f(15), f(341) の値を求めよ。

(2) k を正の整数とする。このとき $0 \leqq n < 2^{2k+1}$ を満たす n のうち f(n) が最大になる n を求めよ。

(3) 再帰的表現を用いずに f と同じ戻り値を返す関数を記述せよ。

B1 p を素数, G を有限群, P を G のシロー p-部分群とする。また, G の元で位数が p と素であるもの全体からなる集合を L とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) K は G の正規部分群で位数が p と素であるものとする。さらに, $G = PK$ が成立しているとする。このとき, $K = L$ を証明せよ。

(2) L は G の部分群になっていると仮定する。このとき, L は G の正規部分群であって, さらに $G = PL$ であることを証明せよ。

B2 R は単位元を持つ可換環で, 零元 0_R と異なる元を持つとせよ 。

$$S = R \times R = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$$

とおく。S の元 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) に対して和と積を

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

で定め, S を可換環と見る。S のイデアル I に対して

$$I_1 = \{a_1 \in R \mid (a_1, 0_R) \in I\}, \quad I_2 = \{a_2 \in R \mid (0_R, a_2) \in I\}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) S は整域でないことを示せ。

(2) S のイデアル I に対して

$$I = I_1 \times I_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in I_1 \text{ かつ } a_2 \in I_2\}$$

となることを示せ。

(3) P が S の素イデアルならば, P_1 と P_2 のうち一方は R の素イデアルで, 他方は R に一致することを示せ。

(4) R を任意の素イデアルで局所化すると整域になると仮定せよ。このとき S を任意の素イデアルで局所化すると整域になるか?

$\boxed{\textbf{B3}}$ $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 部分多様体

$$S^2 := \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考え

$$\iota : S^2 \to \mathbb{R}^4$$

を対応する埋め込み写像とする。また

$$\alpha := xdy \wedge dz + ydz \wedge dw + zdw \wedge dx + wdx \wedge dy$$

を $\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式とする。以下の問いに答えよ。

(1) S^2 の局所座標系 (U, φ) をひとつ

$$U := \{(x, y, z, 0) \in S^2 \mid z > 0\},$$
$$\begin{array}{cccc} \varphi : & U & \to & \varphi(U) \quad \subset \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z, 0) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

によって定める。このとき, α の引き戻しとして得られる S^2 上の微分形式 $\iota^*\alpha$ を (U, φ) 上で表せ。

(2) 積分 $\displaystyle\int_{S^2} \iota^*\alpha$ を求めよ。ただし, S^2 上の向きは U 上で $\displaystyle\int_U dx \wedge dy = \pi > 0$ となるものを拡張したものを入れることとする。

$\boxed{\textbf{B4}}$

5 個の 0 単体 v_0, v_1, v_2, v_3, v_4

10 個の 1 単体 $e_{01}, e_{12}, e_{23}, e_{34}, e_{40}, e_{20}, e_{31}, e_{42}, e_{03}, e_{14}$

5 個の 2 単体 $\sigma_{012}, \sigma_{123}, \sigma_{234}, \sigma_{340}, \sigma_{401}$

をもち, 境界作用素が $\partial(e_{ij}) = v_j - v_i$, $\partial(\sigma_{ijk}) = e_{ij} + e_{jk} + e_{ki}$ で与えられた単体的複体を K とする。ここに i, j, k は 0 から 4 までの対応する添数を表す。

また, 5 個の 1 単体 $e_{20}, e_{31}, e_{42}, e_{03}, e_{14}$ とその頂点からなる K の部分複体を L とおく。

$|K|, |L|$ で, それぞれ K, L が表す多面体を表す。

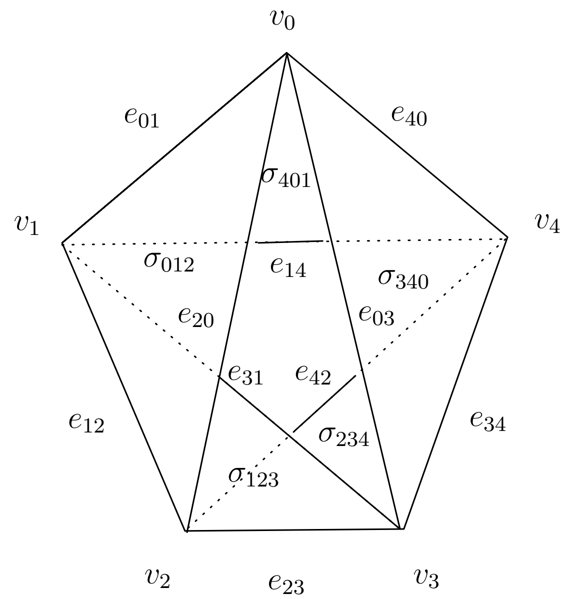
(1) $|L|$ の整数係数ホモロジー群 $H_q(|L|, \mathbb{Z})$, $q = 0, 1$ を求めよ。

(2) $|K|$ の整数係数ホモロジー群 $H_q(|K|, \mathbb{Z})$, $q = 0, 1, 2$ を求めよ。

(3) 包含写像 $\iota : |L| \to |K|$ が 1 次ホモロジー群に誘導する準同形写像

$$\iota_* : H_1(|L|, \mathbb{Z}) \to H_1(|K|, \mathbb{Z})$$

はどのような準同形写像か述べよ。



B5 複素関数 $f(z)$ は単位円板 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ において正則であるとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) f は原点 0 のまわりで

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

の展開を持ち, その収束半径は 1 以上であることを示せ。ただし, r は $r < 1$ を満たす任意の正の数とする。

(2) f は $|f(z)| < 1$ を満たし, かつ原点 0 は f の n 位の零点であるとする。ただし, n は正の整数とする。このとき任意の $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$|f(z)| \leq |z|^n$$

および

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!$$

が成り立つことを示せ。また, ある $z_0 \in \mathbb{D} - \{0\}$ で

$$|f(z_0)| = |z_0|^n$$

が成り立つのはどのようなときか。

B6 $y = y(x)$ を未知関数とする常微分方程式について次の問いに答えよ。なお, y', y'' は, 関数 y の導関数, 2 次導関数を表し, $y^{(j)}$ は関数 y の j 次導関数 $\dfrac{d^j y}{dx^j}$ を表すものとする。

(1) p, q を定数とし, 3 階の常微分方程式

$$y''' - y'' + py' + qy = 0$$

が 1 つの解 $3e^{2x} + 2e^{-3x}$ を持つとする。p, q を求めよ。

(2) a_1, a_2, a_3, a_4 を定数とし, 5 階の常微分方程式

$$5y^{(5)} + a_1 y^{(4)} + a_2 y^{(3)} + a_3 y'' + a_4 y' - 54y = 4xe^x$$

が, 1 つの解 $y(x) = e^x\left\{2x\sin(\sqrt{2}x) - x - 5\right\}$ を持つとする。この方程式の一般解を求めよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の全体を $C[0,1]$ と表す。$C[0,1]$ は関数の和, スカラー倍により線形空間で, ノルム

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\} \qquad (f \in C[0,1])$$

によりバナッハ空間になる。

$C[0,1]$ 上の線形汎関数の列 $\{S_n\}$ を

$$S_n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(\frac{k}{2^n}) \qquad (f \in C[0,1])$$

によって定義する。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 任意の $f \in C[0,1]$ に対して $\{S_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ。(f の一様連続性は用いてもよい。)

(2) $S(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$ と定義するとき, $\sup\{\|Sf\| \mid \|f\| = 1\}$ を求めよ。

(3) $\sup\{\|(S_2 - S)f\| \mid \|f\| = 1\}$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B8}}$ X, Y は確率変数で, 各々の期待値は 0 であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) X が非負ならば, $X = 0$ a.s. であることを示せ。

(2) $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}$ を示せ。また等号成立の条件を求めよ。ただし, $\mathrm{V}(X), \mathrm{V}(Y)$ はそれぞれ X, Y の分散, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ は X と Y の共分散を表す。

B9 $x_1, \ldots, x_n, \alpha, \beta$ を実数とし, 条件 $\mathrm{E}(\epsilon_i) = 0$, $\mathrm{V}(\epsilon_i) = \sigma^2 > 0, \mathrm{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0\,(i \neq j)$ を満たすように, 確率変数 $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ を定める。次の問いに答えよ。

(1) 観測値 $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ が得られたとき, α, β の関数

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

が最小となる $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ を用いて表しなさい。これらの値を $\hat{\alpha}(y_1, \ldots, y_n)$, $\hat{\beta}(y_1, \ldots, y_n)$ とする。

(2) 統計量 $\hat{\alpha}(Y_1, \ldots, Y_n)$, $\hat{\beta}(Y_1, \ldots, Y_n)$ がそれぞれ α, β の不偏推定量であることを示せ。

(3) 推定量 $\hat{\alpha}(Y_1, \ldots, Y_n)$, $\hat{\beta}(Y_1, \ldots, Y_n)$ の分散, $\mathrm{V}(\hat{\alpha})$, $\mathrm{V}(\hat{\beta})$ を計算しなさい。

B10 $\mathcal{P} = \{0, 1, 2\}$ を平文空間，$\mathcal{K} = \{A, B, C\}$ を鍵空間，$\mathcal{C} = \{x, y, z\}$ を暗号文空間とする暗号方式において，平文の出現頻度が $\Pr(0) = 1/2$, $\Pr(1) = 3/8$, $\Pr(2) = 1/8$ であるとする。さらに鍵の使用頻度が $\Pr(A) = 1/4$, $\Pr(B) = 1/2$, $\Pr(C) = 1/4$ であるとし，暗号化関数 E_* が

$$\begin{aligned} &E_A(0) = y, \quad E_A(1) = x, \quad E_A(2) = z, \\ &E_B(0) = z, \quad E_B(1) = y, \quad E_B(2) = x, \\ &E_C(0) = x, \quad E_C(1) = z, \quad E_C(2) = y \end{aligned}$$

を満たすとする。この暗号方式について，以下の (1) および (2) に答えよ。

(1) この暗号方式が完全秘匿性を持たないことを示せ。

(2) この暗号方式が完全秘匿性を持つように $\Pr(A)$, $\Pr(B)$ および $\Pr(C)$ の値を修正し，修正されたパラメータにおいてこの暗号方式が完全秘匿性を持つことを示せ。

B11 プログラミング言語 Scheme について以下の問に答えよ。

(1) 2 引数の手続き (関数と呼ぶこともある)f, 値 c, リスト（a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n）($n \geq 0$) の 3 つが引数として与えられたとき、

$$(f\ (f \ldots\ (f\ (f\ c\ a_1)\ a_2)\ \ldots\ a_{n-1})\ a_n)$$

を求めるような手続き `fold-left` を作成せよ。

(2) 値 c とリスト s を引数にとり、c が s の要素であるかどうかを真偽値 (`#t` または `#f`) で返す手続き `memq?` を作成せよ。要素どうしは基本手続き `eq?` で比較するものとする。また、`fold-left` を用いてもよい。

(3) `fold-left` と `memq?` を用いて、与えられたリストの要素から重複を取り除いてできるリスト (要素の順番は問わない) を求める手続き `setify` を作成せよ。

B12 2 変数関数記号 + による等号付きの 1 階述語論理の言語 $L = \{=, +\}$ を考える。整数 $\mathbb{Z}$, 有理数 $\mathbb{Q}$, 実数 $\mathbb{R}$ 上では, + は通常の加法を表すとする。

(1) $\mathbb{Z} \not\models \varphi$ だが $\mathbb{Q} \models \varphi$ となるような言語 L での閉論理式 (closed formula) φ をひとつつくれ。

(2) 量化記号 (quantifiers) を含まず, 自由変数はたかだか $x, y_1, \ldots, y_n$ しか含まない L-論理式 $\theta[x, y_1, \ldots, y_n]$ と 有理数 $a_1, \ldots, a_n$ を考える。このとき $\mathbb{Q} \models \exists x\, \theta[x, c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}]$ と $\mathbb{R} \models \exists x\, \theta[x, c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}]$ は同値であることを証明せよ。但しここで c_a は有理数 a を表す定数記号である。