平成２６年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２５年８月２０日（火）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある。

A0 は全員が解答すること。

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで 解答すること。
（２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

１枚に１題だけ を解答すること。

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ 空でない集合 X, Y と写像 $f\colon X \to Y$ に対して,

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$$

とおく. また, $c \in Y$ に対して, $L_c = \{(x, c) \mid x \in X\}$ とおく. 集合 S の濃度を $|S|$ で表す.

(1) 全単射 $g\colon Z \to X$ が存在することを示せ.

(2) f が単射であることと, 任意の $c \in Y$ に対して $|L_c \cap Z| \leq 1$ が成り立つことが同値であることを示せ.

(3) f が全射であることと, 任意の $c \in Y$ に対して $|L_c \cap Z| \geq 1$ が成り立つことが同値であることを示せ.

(4) 任意の部分集合 $U \subset X \times Y$ に対して

$$U \cap Z \subset \bigcup_{c \in Y, L_c \cap U \neq \phi} L_c \cap Z$$

が成り立つことを示せ. また, 上の式で両辺が等しくないような X, Y, f, U の例を挙げよ.

$\boxed{\textbf{A1}}$ A を実数を成分とする 4 次正方行列, f を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義されるものとする. $f^2 = f \circ f$ を合成変換とするとき, $\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(f^2)$ が成り立つと仮定する.

(1) f が単射でないことを示せ.

(2) $\mathrm{rank}(A^2) \leq 2$ を示せ.

(3) A は対角化できないことを示せ.

(4) さらに, ある 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \quad f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

が成り立つと仮定する. このとき, A の固有多項式とジョルダン標準形を求めよ.

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) $\mathbb{R}^2$ の集合 $D\colon 0 \leq x - y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$ における次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x-y}{1+(x-y)(x+y)}\, dxdy$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の単位球 $B\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ における以下の 3 重積分の値を求めよ. ただし n は自然数, また (iii) で α, β, γ は実定数とする.

(i) $$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^n\, dxdydz$$

(ii) $$\iiint_B x^{2n}\, dxdydz$$

(iii) $$\iiint_B (\alpha x + \beta y + \gamma z)^{2n}\, dxdydz$$

$\boxed{\textbf{A3}}$

(1) 次の5つの性質と2つの命題を考える．ただし，以下で，X は位相空間，A は X の部分集合，f は X から X 自身への連続写像とする．

(P_1)　X の開集合

(P_2)　X の閉集合

(P_3)　コンパクト

(P_4)　連結

(P_5)　X で稠密

命題 1. 任意の X, A, f について，A が (P_n) ならば $f(A)$ も (P_n) である．

命題 2. 任意の X, A, f について，A が (P_n) ならば $f^{-1}(A)$ も (P_n) である．

(P_1) から (P_5) のうち，命題 1 が成り立つものを全てあげよ．また，命題 2 が成り立つものを全てあげよ．(理由は付けず，答えだけでよい.)

(2) 2つの位相空間の一方から他方へ連続な全射が存在するかどうかを考える．次の4つの場合に，連続な全射が存在するかどうか答えよ．存在する場合は具体的に写像を作れ．存在しない場合は，その理由を述べよ．ただし，数直線 $\mathbb{R}$ には通常の位相を入れ，$\mathbb{R}$ の部分集合には $\mathbb{R}$ の相対位相を入れて考える．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合，$[0,1]$ は単位閉区間，$(0,1)$ は単位開区間を表す．

(a)　$\mathbb{R}$ から $\mathbb{Z}$ へ

(b)　$[0,1]$ から $(0,1)$ へ

(c)　$(0,1)$ から $[0,1]$ へ

(d)　$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Z}$ へ

$\boxed{\textbf{A4}}$

確率変数 X_1, X_2 が独立で, それぞれが区間 $(-1,1)$ 上の一様分布に従うとする．次の問いに答えよ．

(1) $Y = \min[X_1, X_2]$ の積率母関数を求めよ．

(2) $W = X_1 + X_2$ の確率密度関数を求め, そのグラフを図示せよ．

(3) $Z = X_1X_2$ の確率密度関数を求め, そのグラフを図示せよ．

A5 以下の Pascal プログラム (の断片) について，以下の問いに答えよ．

```
function f(m, n: integer) : integer;
begin
  if (m <= 0) or (n <= 0) then f := 1
  else if (m mod 2 = 0) then f := f(m−1,n)+f(m,n−1)
  else f := f(m−1,n)−f(m,n−1)
end;
```

(1) f(2,5), f(3,4), f(3,5) をそれぞれ求めよ．

(2) 任意の整数 m, n について f(m,n) の実行は終了することを証明せよ．

(3) 任意の正の奇数 m, n について f(m,n)=0 を証明せよ．

(4) 任意の整数 m, n について f(m,n)=f(n,m) を証明せよ．

$\boxed{\textbf{B1}}$　群 G, H に対し，$f : G \to H$ は準同型写像で，全射であるとする．

(1) G の部分群 L に対し，

$$L\mathrm{Ker}(f) = \{\ xa \mid x \in L, a \in \mathrm{Ker}(f)\ \}$$

は G の部分群であり，$f^{-1}(f(L)) = L\mathrm{Ker}(f)$ が成り立つことを示せ．

(2) G の部分群 M に対し，

$$\Gamma(M) = \{\ (x, f(x)) \mid x \in M\ \}$$

とおくと，$\Gamma(M)$ は $G \times H$ の部分群であることを示せ．さらに，同型

$$\Gamma(G)/\Gamma(\mathrm{Ker}(f)) \cong H$$

が成り立つことを示せ．

(3) G の正規部分群 N に対し，

$$\Delta(N) = N \times f(N)$$

とおくと，$\Delta(N)$ は $G \times H$ の正規部分群であることを示せ．さらに，同型

$$(G \times H)/\Delta(\mathrm{Ker}(f)) \cong H \times H$$

が成り立つことを示せ．

B2

(1) $\mathbb{Q}[X]/(X^2+aX+6)$ が体にならないような整数 a をすべて求めよ．

(2) $\mathbb{Q}[X]/(X^2+2X+6)$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であることを示し，そのガロア群を求めよ．

(3) $\mathbb{Q}[X,Y]/(X^2+2X+6)$ の (0) 以外の素イデアルは極大イデアルであることを証明せよ．

(4) $R=\mathbb{Q}[X,Y]/(X^2+2X+6)$ とし，$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．また，体としての中への同型写像 $f\colon R/\mathfrak{m}\to\mathbb{C}$ 全体の集合を A とする．このとき，A は空でない有限集合であることを証明せよ．

B3 a と b を正の数とし，媒介変数表示

$$(x,\, y)=(a\cos\theta,\, b\sin\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

で定義される平面曲線を γ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線積分

$$\int_\gamma ydx-xdy$$

を求めよ．

(2)

$$d\Big(\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}\Big)=0$$

を示せ．ただし，d は外微分を表す．

(3) 線積分

$$\int_\gamma \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

を求めよ．

$\boxed{\textbf{B4}}$ O$(0,0,0)$, A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$, C$(0,0,1)$, D$(-1,0,0)$ を xyz 空間内の 5 点とする．3 単体 |OABC| の，2 次元以下の辺単体全て（0 単体 4 個，1 単体 6 個，2 単体 4 個）からなる単体複体を K とし，3 個の 0 単体 O, B, D と 2 個の 1 単体 |BD|, |OD| からなる単体複体を L とする．このとき，単体複体 $K \cup L$ の整係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{\textbf{B5}}$ $\mathbb{C}$ を複素平面とし, $r > 0$ に対して積分路 C_r は向きのついた曲線

$$C_r : [0,\pi] \ni \theta \mapsto re^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

とする．

(1) $f(z)$ が $z = 0$ の近傍で正則で, $f(0) = 1$ をみたす関数であるとき, $\displaystyle\lim_{r\to+0}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z}dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ を証明せよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{B6}}$ $L^1(\mathbb{R})$ を, $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分な関数全体の集合とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f, f^3 \in L^1(\mathbb{R})$ のとき, $f^2 \in L^1(\mathbb{R})$ を証明せよ．

(2) $f, f^3 \in L^1(\mathbb{R})$ のとき, $\displaystyle\lim_{p\to 2}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2 dx$ を証明せよ．

(3) 正の整数 n を固定し, $f(x) = \exp(-|x|^n)$ $(x \in \mathbb{R})$ とおき, 関数

$$g(p) = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx \quad (p > 0)$$

を定める．このとき, g が p について微分可能であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B7}}$ $H(\xi,\eta)=\frac{1}{2}(\xi+\eta)^2+\frac{1}{4}\xi^4$, $V(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ とする．次の2つの常微分方程式系を考える．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial \xi}\\ \frac{\partial H}{\partial \eta}\end{pmatrix}, \tag{I}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\end{pmatrix}. \tag{II}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $(\xi(t),\eta(t))$ を (I) の解とし, $F(t)=H(\xi(t),\eta(t))$ とするとき,

$$\frac{d}{dt}F(t)=0$$

を示せ.

(2) $(\xi(t),\eta(t))$ を (I) の解とし, $(\xi(t),\eta(t))$ が

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を満たすならば, 任意の $t\geq 0$ に対して,

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

が成立することを示せ.

(3) $(x(t),y(t))$ を (II) の解とし, $G(t)=V(x(t),y(t))$ とするとき, G の満たす微分方程式を求めよ.

(4) $(x(t),y(t))$ を (II) の解とするとき,

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を示せ.

B8 $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}$ を $[0,1]$ 上のボレル集合族, P を $[0,1]$ 上のルベーグ測度とする. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ の下で次の問いに答えよ.

(1) n を正の整数とする. 独立事象列 $A_j, j=1,2,\ldots,n$ の例を与えよ.

(2) A_1, A_2 が独立, A_2, A_3 が独立, A_3, A_1 が独立であるとき, A_1, A_2, A_3 が独立となるか. 独立となる場合は, 証明を, そうでない場合は, 反例を与えよ.

(3) 無限事象列 $A_1,A_2,\ldots$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)<\infty$ をみたせば, $\displaystyle P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}A_j)=0$ が成り立つことを示せ.

(4) 独立である無限事象列 $A_1,A_2,\ldots$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)=\infty$ をみたせば, $\displaystyle P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=k}^{\infty}A_j)=1$ が成り立つことを示せ.

B9 n を正の整数とし，$X_1,\ldots,X_n$ を独立な確率変数の列とする．また，各 $i=1,\ldots,n$ に対して，X_i は平均が μ, 分散 σ_i^2 の正規分布に従うとする．ただし，μ は未知の実数で，σ_i は既知の正の実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle S=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma_i^2}$ は μ の十分統計量であることを示せ.

(2) 十分統計量 S を用いて，μ の不偏推定量 $\widehat{\mu}$ を作れ.

(3) 不偏推定量 $\widehat{\mu}$ の確率分布を求めよ.

(4) 平均 μ の不偏推定量の分散に関する Cramér-Rao の下限を求め，不偏推定量 $\widehat{\mu}$ の効率を求めよ.

(5) 不偏推定量 $\displaystyle\overline{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ と定義する．このとき, $\overline{\mu}$ の $\widehat{\mu}$ に対する相対効率 $\displaystyle r=\frac{\mathrm{var}(\widehat{\mu})}{\mathrm{var}(\overline{\mu})}$ を求めよ．また，$r\le 1$ が成立することを示せ.

$\boxed{\textbf{B10}}$ P を 2 以上の整数とする．サイズ $P \times P$ の二元体上の行列 $I(1)$ を

$$I(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とし，整数 b に対して行列 $I(b)$ を $I(b) = I(1)^b$ と定める．更に，サイズ $3P \times 6P$ の行列 H を

$$H = \begin{pmatrix} I(0) & I(0) & I(2) & I(1) & I(0) & I(0) \\ I(3) & I(4) & I(7) & I(7) & I(7) & I(8) \\ I(-1) & I(1) & I(5) & I(6) & I(7) & I(9) \end{pmatrix}$$

と定義する．

(1) $\mathrm{rank}(H) \leq 3P - 2$ を示せ．

(2) 行列 Γ を

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H^T & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，H^T は H の転置行列を表す．

(2 – 1) $P = 10$ の時，Γ を隣接行列にもつグラフの最小内径を求めよ．

(2 – 2) $P = 9$ の時，Γ を隣接行列にもつグラフの最小内径を求めよ．

ただし，グラフの最小内径とは，そのグラフに含まれるサイクルの長さの最小値のことである．

B11 次の Scheme のプログラムについて問いに答えよ．

```
(define (fold-right f c s)
  (if (null? s)
      c
      (f (car s) (fold-right f c (cdr s)))))

(define (flatten ss)
  (fold-right append '() ss))

(define (map f s)
  (fold-right (lambda (x y) (cons (f x) y)) '() s))

(define (mmap f ss)
  (map (lambda (s) (map f s)) ss))

(define (flatten-mmap f ss)
  (flatten (mmap f ss)))
```

(1) 2 引数の手続き (関数と呼ぶこともある) `append` は，長さ n のリスト $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n)$ と長さ m のリスト $(b_1\ b_2\ \ldots\ b_{m-1}\ b_m)$ $(n, m \geq 0)$ が引数として与えられたとき，長さ $n+m$ のリスト $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_{n-1}\ \ a_n\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_{m-1}\ \ b_m)$ を返すようなものであり，このときの `cons` の総呼び出し回数は n になる．そのような `append` を，再帰を使わず上記の `fold-right` を用いて定義せよ．

(2) 手続き `flatten` と `mmap` のそれぞれについて，仮パラメタ `ss` に対応する引数として，長さ n のリストを要素として m 個並べたリストを与えたときの `cons` の総呼び出し回数を，n, m を用いて表せ．ただし，仮パラメタ `f` に対応する引数に由来する `cons` の呼び出しは数えないものとする．

(3) 手続き `flatten-mmap` の引数と返り値との間の関係を簡潔に説明せよ．

(4) 手続き `flatten-mmap` と同じ働きをするが，`cons` の総呼び出し回数が返り値のリストの長さに等しくなるような手続き `fm` を定義せよ．ただし，仮パラメタ `f` に対応する引数に由来する `cons` の呼び出しは数えないものとする．

$\boxed{\textbf{B12}}$ 決定性有限オートマトン $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対して，関数 $\beta, \gamma : Q \times \Sigma^* \to Q$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \beta(q, \varepsilon) &= q & \gamma(q, \varepsilon) &= q \\ \beta(q, wa) &= \delta(\beta(q, w), a) & \gamma(q, aw) &= \gamma(\delta(q, a), w) \end{aligned}$$

ただし $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ である．

(1) 任意の $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$ に対して $\beta(q, aw) = \beta(\delta(q, a), w)$ であることを，帰納法を使って証明せよ．(何についての帰納法であるか明記すること．)

(2) 任意の $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ に対して $\beta(q, w) = \gamma(q, w)$ であることを証明せよ．